Q. 微分せずに増減表を書く手順が分かりません.

A. 増減表を書くには微分係数の計算が必須です.

Q. 逆三角関数の微分係数を，逆関数の微分法を用いずに求める方法を知りたいです.

まず，サインの微分係数を求める方法：

斜辺 1，頂角xの実線の直角三角形の高さ= $\sin\ x$

斜辺 1，頂角$(x+dx)$の鎖線の直角三角形の高さ= $sin(x+dx)$

$\sin x$の微分 $d(sin\ x)=\sin(x+dx)-\sin x$

= 点々をつけた直角三角形(D と呼ぶ)の高さ

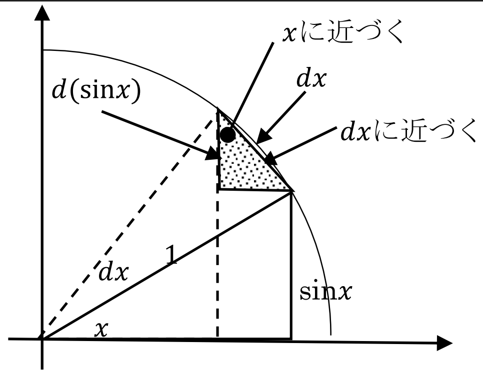
$dx\to 0$の極限で

・D の斜辺は円弧の長さ$1\times dx$に近づく

・円弧 dx を見込む二等辺三角形の等角は 90 度に近づく

・D の頂角がxに近づく

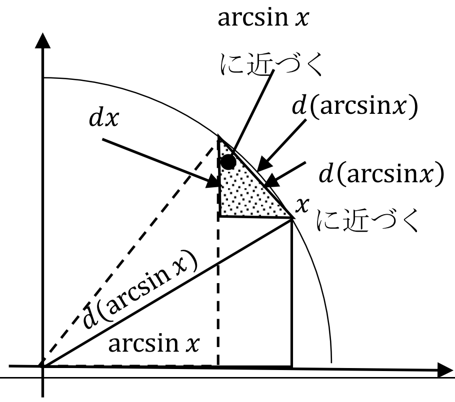
よって，比 $\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$



arcsin xについて

$$\frac{dx}{d(\arcsin x)}=\cos(\arcsin x\ )=\sqrt{1-\{\sin(\arcsin x)^2\}}\ =\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



逆三角関数はどんなところに使いますか？

直角三角形の辺の長さが既知のとき，角度（ラジアン）を教えてくれる関数が逆三角関数である．直接・間接にそのような計算が必要になる場合はたくさんあるだろう．具体的にどんな場合に使う気になるかは，各人の想像力で決まる．

積分

$$\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{1-x^2}}},\qquad \int\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{1+x^2}}$$

などは，逆三角関数を知らないと「関数で表せない積分」になってしまう．

問題 3-3 {1} (2)

微分係数の定義にしたがって

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\right)$$

ここで，分子に$f(x)g(x)$を加えて引く（なにも変わらない）と

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)\}-\{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)\}}{g(x+\Delta x)g(x)}\right)$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}g(x)-f(x)\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{g(x+\Delta x)g(x)}\right)$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)$$

となる．ここで

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}=\frac{1}{g(x)^2},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=g'(x)$$

の各極限が存在するとき

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\times\left\{g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right\}$$
$$= \frac{1}{g(x)^2}\{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\}$$

を得る．

問題 3-3{2}(1)

Q.略解に$x=\pm 1$と書いてありますが，これは書かなければいけませんか？

A.最後の式$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$だけ見ると$|x|<1$は（平方根の中が正になることと，分母が 0 にならないという要請から）当然のことなので書く必要がないようにも思う．だが，この教科書の著者は「はじめに$0\le y\le\pi$とおいたので$x=\cos y$の値は$x=\pm 1$の間のすべての実数をとりうることになるが，微分係数の式の値が存在するためには$x=\pm 1$としなければいけない」という注意を述べた．注意を喚起する意味で書いておいたほうがいいだろう．

Q. $0\le y\le\pi$という条件はどこから来たのですか？

Arccos の定義から．教科書 p.23～p.25 参照（わからないことがあったら，何が分からないかをいろいろと考え<<これには想像力が必要>>該当する教科書の記述を見つけて勉強するのが最初にすべきこと）

問題 3-4{1}(4)

Q. $f'(x)=\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}$となりましたが、$f'(x)=0$になる$x=2$と$x^2+2x+4=0$の解$-1\pm\sqrt{3}i$を増減表に書き加えた方が良いのでしょうか。

A. 実数の範囲で考えているので，$-1\pm\sqrt{3}i$は不要．$x=2$のときの$f(x), f'(x), f''(x)$は書いたほうがよい．

問題 3-4{1}(5)　微分して 0 にならない位置で極小になるが分かりません.

微分法による極値の判定は，微分できるときにしか使えない．微分できない点（微分係数が存在しない点）でも極小（大）や最小（大）になりうる．たとえば$|x|$は$x=0$で微分できないが極小かつ最小となる．関数の定義域の端も極値や最大最小となりうる．　ある点が極小とは「その近くで一番小さい」ことだから，その点で尖って

いても，途切れていても，極小になりうる．

ある関数が，微分できる滑らかな関数をつなげたものとして定義されているとき，各区間の内部で微分係数が 0 の点が極値の候補となるが，同時に各区間の端の点も極値の候補である．これらの極値の候補のなかから，最大や最小が決まる．

$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$の自然な定義域を$x\geq 0$とすることも可能だが，ここでは実数の全域を定義域とすることにしよう．ただし$(-|x|)^{\frac{1}{3}}=-|x|^{\frac{1}{3}}$とするので，$f(x)=x^{\frac{2}{3}}=|x|^{\frac{2}{3}}$である．

$x>0$のとき，$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}>0$

$x<0$のとき，$\left((-x)^{\frac{2}{3}}\right)'=\left(\frac{d(-x)}{dx}\right)\times\frac{2}{3}(-x)^{\frac{2}{3}-1}=-\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}|x|^{-\frac{1}{3}}<0$

$f(x)$は，$x<0$で単調減少し$x>0$で単調増加する．

$x=0$のとき，$y=f(x)=x^{\frac{2}{3}}=|x|^{\frac{2}{3}}$のグラフからも分かるように，微分係数は存在しない．上の計算からは，微分係数は，$x<0$の領域で 0 に近づくと負の無限大に発散し，$x>0$の領域で 0 に近づくと正の無限大に発散することがわかる．

左側から$x=0$に近づくと関数値が減少し，$x=0$を通り越して右側に行くと増加するので，$x=0$で極小となる（最小でもある）．

極大は存在しない．

$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$の定義域を$x\geq 0$とする場合にも，$x=0$が極小（かつ最小）となる．