演習[4]1(1)

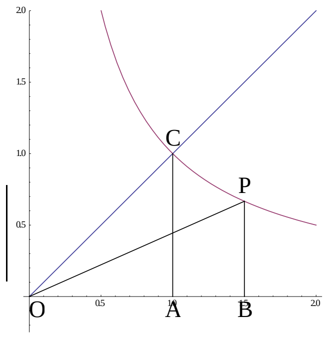
【双曲線関数】

$\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ が双曲線関数と呼ばれる理由は，双曲線のグラフ上の点の座標がこれらの関数を用いて表されるからである．以下に詳細を示す．

・区間$[1,x]$で$y=\frac{1}{x}$とx軸に挟まれた間の図形の面積は$\log x$：$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x$を既知とする．

・下図のように，原点 O， A(1,0),B(x,0),C(1,1),P(x,1/x)とする：

図形 OCP の面積 $s=$ (OCA + ACPB)− OPB $= \left(\frac{1}{2} + \log x\right) - \frac{1}{2} \times x \times \frac{1}{x} = \log x$



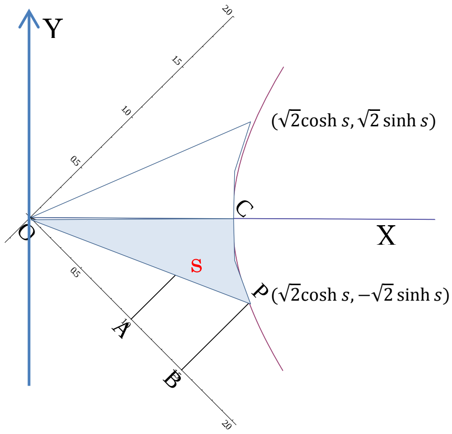
・点 P の座標$\left(x, \frac{1}{x}\right)$を OCP の面積 s で表す：

$$s = \log x \to x = e^s,\ \text{よって}\ \mathrm{P}(e^s, e^{-s})$$

・双曲線 $x^2 - y^2 = 2$の上の点 P の座標を（上の図形において対応する）OPQ の面積で表すために，座標軸を 45 度回転する：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^s + e^{-s} \\ -e^s + e^{-s} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cosh s \\ -\sinh s \end{pmatrix}$$

$x^2 - y^2 = 1$ のとき，図形の相似比を考慮すると（$\cosh s, \sinh s$）



【これらの関数にわざわざ名前がついている理由】

さまざまな自然現象や人工物の形にこれらの関数が現れる．

たとえば，

http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AB%E3%83%86%E3%83%8A%E3%83%AA%E3%83%BC%E6%9B%B2%E7%B7%9A

【三角関数と（部分的に）同じ記号を使う理由】

・よく似た（しかし違う）関係がある：

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x, \quad \tanh(-x) = -\tanh x$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

・虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を用いると，三角関数と直接に関連付けられる．

$$\sinh x = -i\sin(ix), \qquad \cosh x = \cos(ix)$$

演習問題の計算・グラフ描画の過程を詳細に記す：

(a)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{4e^x e^{-x}}{4} = \mathrm{e}^{x-x}$$

$$= \mathrm{e}^0 = 1$$

(b)

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{(e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}) + (e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y})}{4} = \frac{2e^x e^y - 2e^{-x} e^{-y}}{4}$$

$$= \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y)$$

(c)

$$\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{(e^x e^y + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}) + (e^x e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y})}{4} = \frac{2e^x e^y + 2e^{-x} e^{-y}}{4}$$

$$= \frac{e^x e^y + e^{-x} e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{(x+y)} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y)$$

(d)

$$\tanh(x+y) = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \frac{\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y} = \frac{\cosh y\,(\sinh x + \cosh x \tanh y)}{\cosh y\,(\cosh x + \sinh x \tanh y)} = \frac{\sinh x + \cosh x \tanh y}{\cosh x + \sinh x \tanh y}$$

$$= \frac{\cosh x\,(\tanh x + \tanh y)}{\cosh x\,(1 + \tanh x \tanh y)} = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

(e)

$$\sinh(-x) = \frac{e^{(-x)} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = -\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\tanh(-\mathrm{x}) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x$$

(f)

$f(x) = \sinh x$

【下調べ】

・奇関数

・代表的な通過点：$f(0) = 0,\quad f(1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \simeq \frac{2.7 - \frac{1}{2.7}}{2} \simeq 1.2,\ f(-1) \simeq -1.2$

・原点での傾き（$e^x \simeq 1 + x,\ e^{-x} \simeq 1 - x$）：$f(x) \simeq \frac{(1+x)-(1-x)}{2} = x$

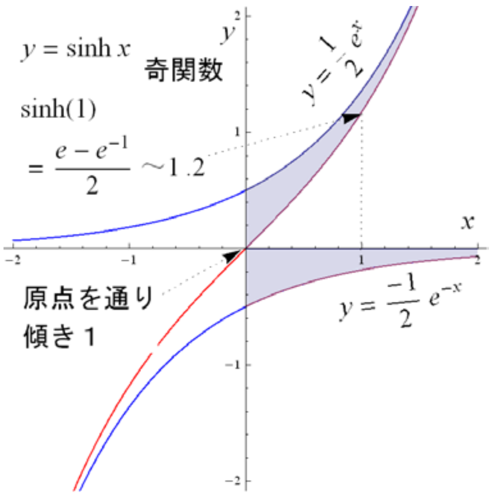
・漸近（曲）線：$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0,\ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ より $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}e^x,\ f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{-1}{2}e^{-x}$

【グラフ】

・$\frac{1}{2}e^x$と$\frac{-1}{2}e^{-x}$を描く

・$\frac{1}{2}e^x$から$\frac{1}{2}e^{-x}$を引く

【記入】下調べの要点を文字や記号でグラフに記入する



$f(x) = \cosh x$

【下調べ】

・偶関数

・代表的な通過点：$f(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$,　$f(1) = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} \simeq \frac{2.7 + \frac{1}{2.7}}{2} \simeq 1.5$, $f(-1) \simeq 1.5$

・原点での傾き(偶関数なので)　$f'(0) = 0$

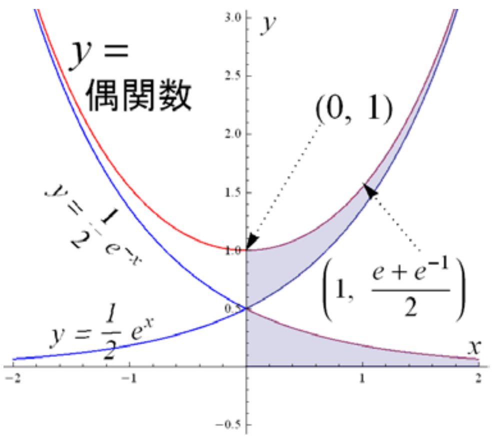
・漸近（曲）線：$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ より$f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}e^x$,$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{1}{2}e^{-x}$

【グラフ】

・$\frac{1}{2}e^x$と$\frac{1}{2}e^{-x}$を描く

・$\frac{1}{2}e^x$と$\frac{1}{2}e^{-x}$を加える

【記入】下調べの要点を文字や記号でグラフに記入する



$$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

【下調べ】

・奇関数

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1 \\ \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1 \end{cases}$$

原点における傾き：$\tanh x \simeq \frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)+(1-x)} = \frac{2x}{2} = x$，傾き 1

$$\tanh 1 = \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}} \simeq \frac{2.7 - \dfrac{1}{2.7}}{2.7 + \dfrac{1}{2.7}} \simeq \frac{1.2}{1.5} = 0.8$$

【グラフ】

下調べの結果を使いさらに$\sinh x$と$\frac{1}{\cosh x}$のグラフを描いて積をとってもよいが，たぶん下調べの結果だけを使っても同程度の精度でグラフが描けるだろう．