$\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\log\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)$となるのはなぜですか.

「$\lim_{x\to a}u(x)=b$のとき$\lim_{x\to a}f\left(u(x)\right)=\lim_{u\to b}f(u)$となるのは分かるが，$\lim_{x\to a}f\left(u(x)\right)=f\left(\lim_{x\to a}u(x)\right)$となるだろうか？」という疑問でしょうか．そうなるのは，$f(x)$が$x=b$で連続のときに限られます.

グラフどうしの掛け算というのが理解できません.

２つのグラフの（xが共通の）代表的な点をとって，グラフの値どうしを掛け算します.

たとえば，一方のグラフの値が 0 ならば，掛け算の結果は(他のグラフの値によらず)0 となるし，一方が 1 なら，結果は他のグラフの上に来ます．その後，両方のグラフを見ながら（値を計算した代表的な点以外の場所で凹凸などがあれば注意する）なめらかに点をつないでいきます.

たとえば，$y=f(x)\times\sin x$のグラフを描くとき，$|f(x)\times\sin x|=|f(x)||\sin x|\leq|f(x)|$となるので，$|f(x)|=\pm f(x)$の２つのグラフを描くと，$y$のグラフがその中に納まってしまいます．さらに$\sin x=0$となる位置では$y=0$，$\sin x=\pm 1$の位置では$y=\pm f(x)$となるので，これらの通過点を確保してグラフを描くとよいでしょう.

変域という用語を聞いたことがありません.

変数がとりうる値の全域を変域ということがあります.
http://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%96%A2%E6%95%B0_(%E6%95%B0%E5%AD%A6)

「$f(x)=\frac{x-|x|}{x}$ $(x<0)$，$f(x)=2$ $(x=0)$が連続であるxの変域を調べよ.」の解説をお願いします.

$x<0$（$x\neq 0$）のとき$f(x)=\frac{x-|x|}{x}=\frac{x-(-x)}{x}=\frac{2x}{x}=2$．定数関数は連続だから，$f(x)$は$x<0$で連続.

原点に左側から接近するとき（$x\neq 0$），$\lim_{x\to -0}f(x)=2$. 原点の関数値は$f(0)=2$と定義されているので$\lim_{x\to -0}f(x)=f(0)$が成り立ち，原点でも連続（関数は正の側で定義されていないので，連続の定義も片側の極限でだけで許す）.
したがってこの関数が連続となる変域は$x\leq 0$である（定義域と一致する）.

有理関数（分数の関数）の連続性を調べるときに，なぜ分母だけ注目するのですか.

多項式は連続関数です．連続関数どうしの掛け算や割り算もまた連続になりますが，唯一の例外は分母の多項式が 0 となる位置です．そこでは関数値が発散するので不連続となります．分母が 0 となる位置だけに注目すれば十分です.