条件付き極値

ラグランジュの未定乗数法

例　文具店の在庫戦略

- 鉛筆（¥10）、ボールペン(¥100)、万年筆(¥1000)
- 1個を買う客が支払う金額が平均￥80
- 最適な在庫は？

$f(x,y,z) = x\log x + y\log y + z\log z$を最大にする
ただし，条件は
$$g(x,y,z) = 10x + 100y + 1000z - 80 = 0$$
$$h(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$$

$$F(x,y,z) = f - \lambda g - \mu h,$$
$$F_x = 0, \qquad F_y = 0, \qquad F_z = 0$$
を解くとλとμ，およびx,y,zが決まる

2変数の場合の一般的な形式

$g(x, y) = 0$という条件下で$f(x, y)$の極値を求める

処方:

この段階では未定の定数λを用いて

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

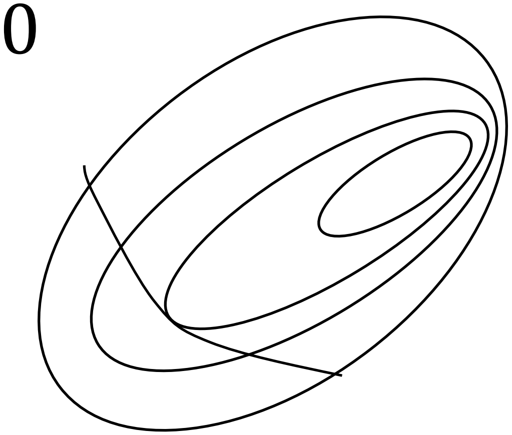
をつくり，その2つの偏導関数を0とおいた連立方程式を解く:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad g(x, y) = 0$$

解(x_0, y_0)が極値である.

幾何学的なイメージ

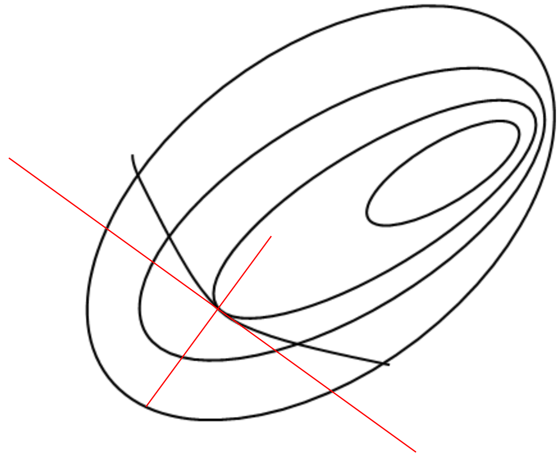
$f(x,y)$の等高線群と曲線$g(x,y)=0$



$g(x,y)=0$にそって移動するとき
$f(x,y)$の値が変化する.

極値: $g(x,y)=0$と$f(x,y)$の等高線が接したとき

数式的な表現



- 接する → 共通の接線を持つ
  - 接点でのfの最大傾斜の方向:接線と直交
  - $g(x,y)=0$はgの等高線の1つ
  - 接点での$g(x,y)$の最大傾斜の方向は接線と直交
- ある点でfとgの最大傾斜の方向が同じ(あるいは反対)向きになるとき, その点が極値

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right) // \left(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y}\right) \to \frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial g}{\partial y}\equiv\lambda \to \left\{\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0,\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0\right\}$$

$$h(x,y)\equiv f(x,y)-\lambda g(x,y),\quad \left\{\frac{\partial h}{\partial x}=0,\frac{\partial h}{\partial y}=0\right\}$$が成り立つ点

問1

$g(x,y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$のとき$f(x,y) = 2xy$の最大値を求めよ.

代入による:

$$x(t) = a\cos t\,, y(t) = a\sin t\,, \qquad 0 \le t < 2\pi$$

$$f(x,y) = 2xy = 2a^2 \sin t \cos t = a^2 \sin 2t = f(t)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(5\frac{\pi}{4}\right) = a^2 @ \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-a}{\sqrt{2}}\right)$$

ラグランジュの未定定数法による:

$$h(x,y) = 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - a^2)$$

$$h_x = 2y + 2\lambda x = 0, h_y = 2x + 2\lambda y = 0$$

$$y = -\lambda x \to 2x + 2\lambda(-\lambda x) = 2x(1 - \lambda^2) = 0$$

$$\to \lambda = \pm 1 \to x = \pm y \to f = \pm 2y^2$$

$$g(\pm y, y) = 2y^2 - a^2 = 0 \to f = \pm a^2$$

問2
$x^2 + y^2 = 1$のとき$f(x, y) = 2x + 3y$が極値となるxとyを決めよ

$$h(x, y) = (2x + 3y) - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$h_x = 2 - 2\lambda x = 0, \qquad h_y = 3 - 2\lambda y = 0$$

$$x = \frac{1}{\lambda}, \qquad y = \frac{3}{2\lambda} \ \rightarrow \ \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1$$

$$\rightarrow \lambda^2 = \frac{13}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{13}}, & y = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ x = \dfrac{-2}{\sqrt{13}}, & y = \dfrac{-3}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

文具店の在庫戦略(1)

- 鉛筆（¥10）、ボールペン(¥100)、万年筆(¥1000)
- 1個を買う客が支払う金額が平均￥80

- 問: 最適な在庫比率 =出現すると予想される確率 (x, y, z)は？

「無知である」⇔「情報エントロピーが最大」

$f(x, y, z) = x \log x + y \log y + z \log z$ の極値を与える(x, y, z)

知っていること(制限条件)

- 全部で100%になる: $f(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$
- 売上の期待値: $g(x, y, z) = 10\,x + 100\,y + 1000\,z - 80 = 0$

文具店の在庫戦略(2)

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x\log x + y\log y + z\log z \\ g(x,y,z) = 10x + 100y + 1000z - 80 = 0 \\ h(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu h(x,y,z)$$

$$\begin{cases} F_x = (\log x + 1) - \lambda \cdot 10 - \mu = 0 \to x = e^{\mu+10\lambda-1} = e^{\mu-1}e^{10\lambda} \\ F_y = (\log y + 1) - \lambda \cdot 100 - \mu = 0 \to y = e^{\mu+100\lambda-1} = e^{\mu-1}e^{100\lambda} \\ F_z = (\log z + 1) - \lambda \cdot 1000 - \mu = 0 \to z = e^{\mu+1000\lambda-1} = e^{\mu-1}e^{1000\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = e^{\mu-1}\left\{e^{10\lambda} + e^{100\lambda} + e^{1000\lambda}\right\} = 1 \\ 10x + 100y + 1000z = e^{\mu-1}\left\{10e^{10\lambda} + 100e^{100\lambda} + 1000e^{1000\lambda}\right\} = 80 \end{cases}$$

を解くとλとμが決まり，x, y, zが決まる．