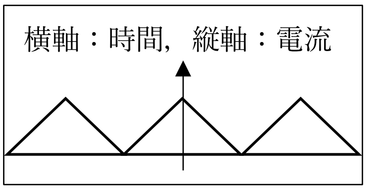
図のような三角波の波形をもつ電流をスピーカに流したところ，かなり歪んだ音がした．その音に「どのような周波数の単音の波（サイン・コサイン波形の波，単色の波，単振動ともいう）がどれぐらい含まれているか」，すなわちその音の周波数スペクトルを知りたい．ここで用いられる数学の手法がフーリエ級数展開である．



【要点 I】基本周波数が$\omega = 2\pi/T$（基本周期T）の周期関数$f(t)$は，周波数が$n\omega$(n：自然数)の単振動の重ね合わせとして表される．数式で表すと

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\} \qquad [1]$$

である．ここで$\frac{a_0}{2}$は「直流成分」ともいい，波形がその値を中心として振動している．右辺を$f(t)$のフーリエ級数といい，係数a_n, b_n（フーリエ係数という）の値を求めることができれば，周波数$n\omega$の単振動がどれぐらい含まれるかを求めたことになる．

【問１】　式[1]の基本的な構成要素である$\{a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\}$は１個のコサイン関数$A_n\cos(n\omega t + \theta_n)$で表すことができる．すなわち，$f(t)$をコサイン波形の集まりと考えるなら，周波数$n\omega$の成分の振幅が$A_n$，位相が$\theta_n$である．そこで

$$a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) = A_n\cos(n\omega t + \theta_n)$$

としたとき，A_nと$\tan\theta_n$をa_nとb_nで表しなさい．

[解] コサインの加法定理により右辺は

$$A_n\cos(n\omega t + \theta_n) = A_n\cos\theta_n\cos n\omega t - A_n\sin\theta_n\sin n\omega t \quad \rightarrow \quad a_n = A_n\cos\theta_n\,,b_n = -A_n\sin\theta_n$$

$$\therefore A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \tan\theta_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

【要点 II】　基本周波数をωとする一群の三角関数

$$\{\cos(\omega t), \cos(2\omega t), \cdots, \cos(m\omega t), \cdots, \sin(\omega t), \sin(2\omega t), \cdots, \sin(n\omega t)\cdots\}$$

の間には「直交関係」と呼ばれる関係がある．それは，$T = 2\pi/\omega$(基本周期)として，

$$\frac{2}{T}\int_0^{\mathrm{T}}\sin n\omega t\cos m\omega t\,dt = 0, \qquad \frac{2}{T}\int_0^{\mathrm{T}}\sin n\omega t\sin m\omega t\,dt = \delta_{mn}, \qquad \frac{2}{T}\int_0^{\mathrm{T}}\cos n\omega t\cos m\omega t\,dt = \delta_{mn}$$

と表される．この関係を式[1]に適用すると，$f(t)$の具体的な波形が与えられたときフーリエ係数を計算するための式を得る：

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

【要点 III】
周期関数を１周期にわたり定積分した値は，積分区間の端の位置にかかわらず，同じ値となる．

単位を電流[A]と時間[s]として測定した結果をグラフ用紙に描いたところ，グラフ用紙の目盛りの振り方（1 cm）を何 A にするか，など）が都合よく調整できたので，グラフは周期２の関数となり

$$f(t) = |t| \cdots -1 \le t \le 1 \qquad [2]$$

と表せた（tも$f(t)$もただの数．しかし，横軸の値１はたとえば 3 s のこと，縦軸の値１は 2.3A のこと，のように読み替えをする必要がある）．

【問２】　式[2]の対称性（偶・奇）と要点 II,III を組み合わせから，ただちに 0 となることがわかるフーリエ係数はどれか？

【解】原点を中心とする対称の区間で奇関数を積分すると 0 になる．$f(t)$が偶関数なので

$$f(-t)\sin n\omega(-t) = -f(t)\sin n\omega t$$

となるから，その積分によって得られるb_nが 0 となる．すなわち

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt = b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = 0$$

【問３】　式[2]がどの値を中心に振動するかを観察すると，ただちに直流成分を求めることができる．その値は何か？要点 II を適用して積分計算と照合しなさい．

【解】$f(t)$は$1/2$を中心に振動する．したがって

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \to a_0 = 1$$

要点 II を適用して確かめると

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1}|t|\,dt = \frac{2}{2}\times 2\int_0^1 t\,dt = 2\times\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

【問 4】$\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \int_0^2 |t|\cos(n\omega t)\,dt = \int_{-1}^{1}|t|\cos(n\omega t)\,dt = \int_{-1}^{1}|t|\cos(n\pi t)\,dt$の計算をしなさい．

[解]

$$\int_{-1}^{1}|t|\cos(n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt = \frac{2}{(n\pi)^2}[n\pi t\sin n\pi t + \cos n\pi t]_0^1$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^2}\{n\pi\sin n\pi + \cos n\pi - 1\} = \frac{2}{(n\pi)^2}\{\cos n\pi - 1\} = \begin{cases} 0 \cdots n = even \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2} \cdots n = odd \end{cases}$$

【要点 IV】サインとコサインのかわりに複素指数関数

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

を利用するフーリエ級数を用いるのが慣例となっている．複素指数関数の微分と積分は

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}, \qquad \int_{t_1}^{t_2} e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{i\omega}[e^{i\omega t_2} - 2^{i\omega t_1}]$$

今回の「三角波形」のフーリエ係数の計算では($T = 2, \omega = 2\pi/T = \pi$)，複素指数関数の計算練習として

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \int_{-1}^{1}|t|\cos\pi nt\,dt, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \int_{-1}^{1}|t|\sin\pi nt\,dt$$

を計算するかわりに

$$\int_{-1}^{1}|t|\cos\pi nt\,dt + i\int_{-1}^{1}|t|\sin\pi nt\,dt = \int_{-1}^{1}|t|\,e^{in\pi t}dt = \int_0^1 t\,e^{in\pi t}dt + \int_{-1}^{0}(-t)\,e^{in\pi t}dt \qquad [3]$$

を計算する．

【問５】$\frac{d}{dt}\left(te^{in\pi t}\right)$を計算しなさい．

[解]

$$\frac{d}{dt}\left(te^{in\pi t}\right) = e^{in\pi t} + in\pi te^{in\pi t}$$

【問６】$\int te^{in\pi t}dt$を計算しなさい．積分定数は書かなくてよい．ヒント：$\int \frac{d}{dt}\left(te^{in\pi t}\right)dt = te^{in\pi t}$.

計算結果を微分し被積分関数と同じになることを確認すること．

[解]

$$\int \frac{d}{dt}\left(te^{in\pi t}\right)dt = te^{in\pi t}, \qquad \int \{e^{in\pi t} + in\pi te^{in\pi t}\}dt = \int e^{in\pi t}dt + in\pi \int te^{in\pi t}dt$$

$$\int te^{in\pi t}dt = \frac{1}{in\pi}\left\{te^{in\pi t} - \frac{1}{in\pi}e^{in\pi t}\right\} = \frac{e^{in\pi t}}{(in\pi)^2}(in\pi t - 1) = \frac{e^{in\pi t}}{n^2\pi^2}(1 - in\pi t)$$

【問７】$\int_0^1 t\,e^{in\pi t}dt$ を計算しなさい．$n = 0, n \neq 0$(偶数と奇数)の３通りに分けて結果を記すこと．ヒント：

$e^{2m\pi i}$ =?, $e^{(2m+1)\pi i}$ =?

[解]

$n = 0$: $\displaystyle\int_0^1 t\,e^{in\pi t}dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$

$n \neq 0$:

$$\int_0^1 t\,e^{in\pi t}dt = \left[\frac{e^{in\pi t}}{n^2\pi^2}(1 - in\pi t)\right]_0^1 = \frac{e^{in\pi}}{n^2\pi^2}(1 - in\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2\pi^2}(1 - in\pi) - \dfrac{1}{n^2\pi^2} = -\dfrac{i}{n\pi} \cdots n\text{: }even \\ \dfrac{-1}{n^2\pi^2}(1 - in\pi) - \dfrac{1}{n^2\pi^2} = \dfrac{-1}{n^2\pi^2}(2 - in\pi) \cdots n\text{: }odd \end{cases}$$

【問８】$\int_{-1}^0 (-t)\,e^{in\pi t}dt$ において $t' = -t$とおき積分を$\int_0^1 ?\,dt$の形に変形しなさい．その形を$\int_0^1 t\,e^{in\pi t}dt$と比較しなさい．

[解]

$$\int_{t=-1}^0 (-t)\,e^{in\pi t}dt = \int_{t'=1}^0 (t')\,e^{-in\pi t'}(-dt') = -\int_{t'=1}^0 (t')\,e^{-in\pi t'}dt' = \int_{t'=0}^1 t'\,e^{-in\pi t'}dt'$$

$\int_0^1 t\,e^{in\pi t}dt$の$n$を$-n$に置きかえたものと同じ

【問９】問７と問８を総合して[3]の定積分を実行しなさい．$n = 0, n \neq 0$(偶数と奇数)の３通りに分けて結果を記すこと．

$n = 0$:

$$\int_0^1 t\,dt + \int_{-1}^0 (-t)\,dt = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 t'\,dt' = 1$$

$n \neq 0$:

$$\int_0^1 t\,e^{in\pi t}dt + \int_{-1}^0 (-t)\,e^{in\pi t}dt = \begin{cases} -\dfrac{i}{n\pi} + -\dfrac{i}{-n\pi} = 0 \cdots n\text{: }even \\ \dfrac{-1}{n^2\pi^2}(2 - in\pi) + \dfrac{-1}{n^2\pi^2}(2 + in\pi) = -\dfrac{4}{n^2\pi^2} \cdots n\text{: }odd \end{cases}$$

【問 10】 2つの複素数が等しいとは実数部と虚数部が等しいことである．これを用い，$\int_{-1}^{1}|t|\cos\pi nt\,dt$と$\int_{-1}^{1}|t|\sin\pi nt\,dt$を求めなさい．場合分けをして結果を示すこと．問2の結果と整合性があるか確認しなさい．

[解]

$$\int_{-1}^{1}|t|\cos\pi nt\,dt=\begin{cases}1\cdots n=0\\0\cdots n:even\\-\dfrac{4}{n^2\pi^2}\cdots n:odd\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}|t|\sin\pi nt\,dt=0$$

【問 11】関数[2]のフーリエ級数を（最初の何項かまでを）具体的に(フーリエ係数の値を数値で，但しπは残す)書きなさい．

[解]

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left\{\cos\pi t+\frac{1}{9}\cos3\pi t+\frac{1}{25}\cos5\pi t+\cdots\right\}$$