

離散フーリエ変換

打ち切りと離散的サンプリング

打ち切り：信号 $f(t)$ の時間 $[0, T]$ の外を切り捨てる
離散的サンプリング： T 内に N 個のサンプル（サンプリング間隔 τ_s ）

サンプルだけから $f(t)$ のフーリエ変換の近似的な値を再構築：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \simeq \int_0^{T=N\tau_s} f(t)e^{-i\omega t} dt \simeq \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau_s)e^{-i\omega k\tau_s}}_{\tilde{F}(\omega) \text{ と記す}} \times \tau_s$$

この意味付けは分かりやすい。
だが、DFTスペクトルを読むときの注意事項を理解しにくくなるだろう

離散フーリエ変換(DFT)の第 m 成分：

$$F_m \equiv \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau_s)e^{-ikm\Omega\tau_s} = \tilde{F}(m\Omega), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

DFTは N 個の数の組：

$\{F_0, F_1, F_2, \dots, F_{N-1}\}$ あるいは $\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_N\}$

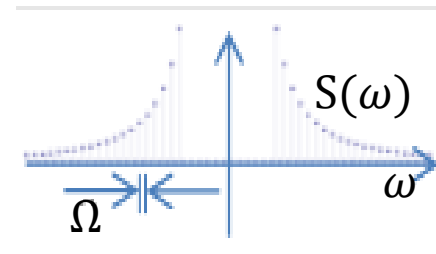
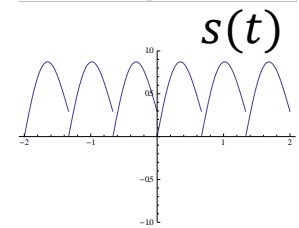
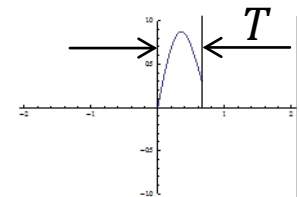
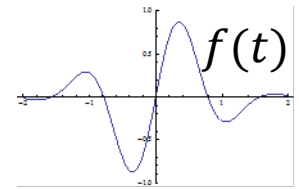
カバーする周波数範囲： $N\Omega = 2\pi \frac{N}{T} = \frac{2\pi}{\tau_s}$

DFTスペクトル間隔： $\Omega \equiv \frac{2\pi}{T}$

- 信号 $f(t)$ の打ち切り
 - 有限の測定時間 T
 - 人為的な繰り返し周期関数 $s(t)$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\Omega t}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\Omega t} dt, \quad \Omega \equiv \frac{2\pi}{T}$$

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \mathcal{F}[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\Omega t} \right) e^{-i\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\Omega) \end{aligned}$$

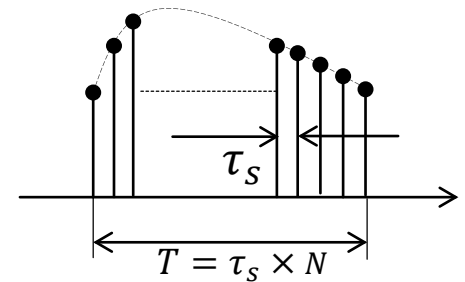


問題01, 02 $S(\omega)$ のデルタ関数による表示を理解する

サンプリング

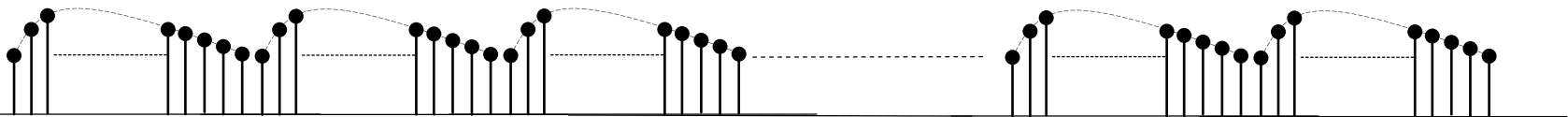
測定時間 T 内に等間隔で N 個のデータをとる

- サンプリング周期 τ_s
- サンプリングレート $\frac{1}{\tau_s}$
- サンプリング角振動数 (サンプリング周波数) $\frac{2\pi}{\tau_s} = \omega_s$
- サンプル数 (= データの数) N
- 測定時間 $T = N\tau_s$



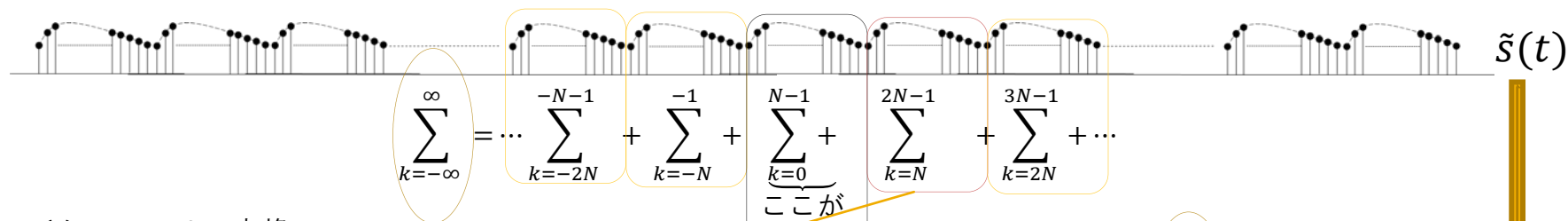
サンプリング後の信号の表現：

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t - k\tau_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(k\tau_s) \delta(t - k\tau_s)$$



DFT (*)

離散量のフーリエ変換として



$\tilde{s}(t)$ のフーリエ変換：

$$\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\tau_s) \delta(t - k\tau_s) \right\} e^{-i\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\tau_s) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\tau_s) e^{-i\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\tau_s) e^{-ik\omega\tau_s}$$

$$\sum_{k=N}^{2N-1} s(k\tau_s) e^{-ik\omega\tau_s} = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{s(k\tau_s)}_{f(k\tau_s)} e^{-ik\omega\tau_s} \underbrace{e^{-i\omega T}}_{\Sigma \text{の共通因子}} = e^{-i\omega T} \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau_s) e^{-ik\omega\tau_s}$$

$$\tilde{S}(m\Omega) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau_s) e^{-ikm\Omega\tau_s} \right) \times [\text{区分の個数}]$$

$\tilde{s}(t)$ のフーリエ変換の「密度」(区分の個数で割ったもの)が離散フーリエ変換

離散フーリエ変換

$$\boxed{\tilde{F}(m\Omega)} \equiv \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau_s) e^{-ikm\Omega\tau_s} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau_s) e^{-2\pi i k m \frac{\tau_s}{T}} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau_s) e^{-\frac{2\pi i}{N} k m}$$

複素指数関数の肩を $\Omega=2\pi/T, N=T/\tau_s$ によって書き換えただけ

DFTの定義

- DFT : N 個の数値の組 $\{F_m\}$
- DFTの第 m 成分

$$F_m = \tilde{F}(m\Omega) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} f(k\tau_s) e^{-\frac{2\pi i}{N} k m}$$

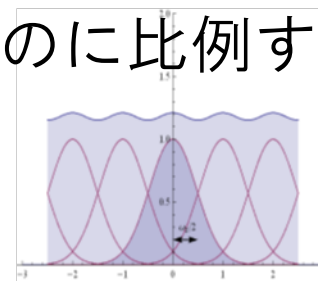
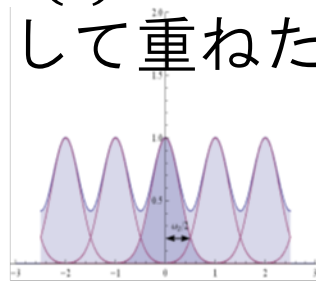
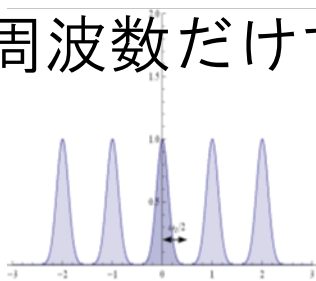
- F_m の添え字 m の開始位置 : 0と1の流儀がある

DFTスペクトルに対する サンプリングの影響

- DFTスペクトルは、「人為的に周期化した信号をサンプリングした後の波形 $\tilde{s}(t)$ 」のフーリエ変換に比例する

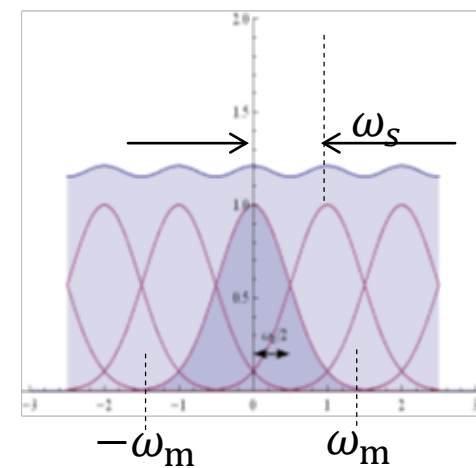
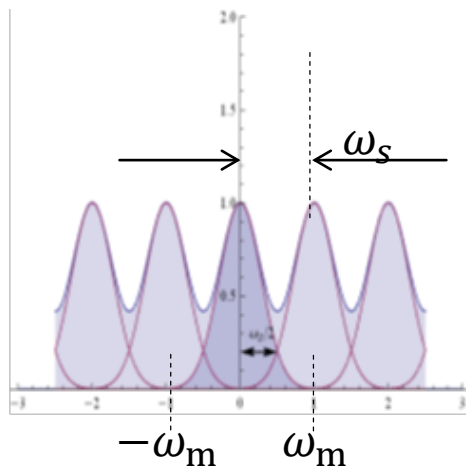
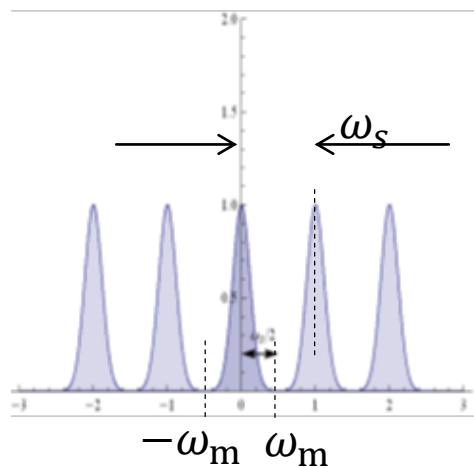
$$\begin{aligned}\tilde{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t - k\tau_s) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\tau_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - n\omega_s)\end{aligned}$$

- DFTスペクトルは、「人為的に周期化した信号をサンプリングする前の波形 $s(t)$ 」のフーリエ変換を、サンプリング周波数だけずらして重ねたものに比例する」



DFTスペクトルに対する サンプリングの影響

アナログ信号 $s(t)$ に含まれる周波数成分の最大値 ω_m が
サンプリング周波数 ω_s の $1/2$ を超えるとき (中図, 右図)
DFTスペクトルからアナログ信号のスペクトルを再現できない

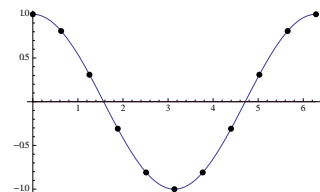


DFTスペクトルに対する サンプリングの影響

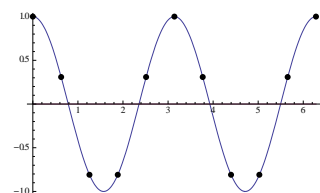
サンプリング周波数 10 kHz

信号周波数

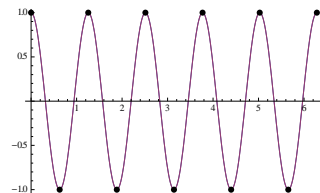
1 kHz



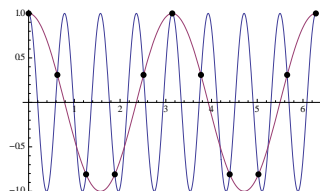
2 kHz



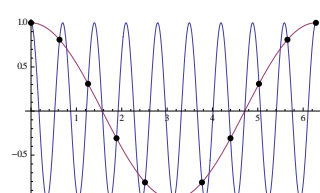
5 kHz



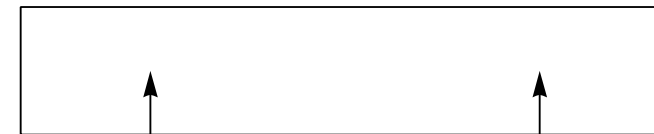
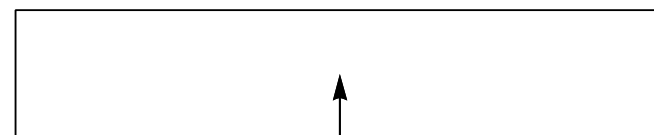
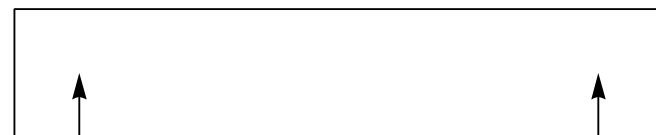
8 kHz



9 kHz



DFT スペクトル



0

10 kHz

DFTの読み方 1

- F_k と F_{k+1} の間隔 :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\tau_s} = \frac{\omega_s}{N}$$

- 第0成分 :

$$F_0 = \sum_{k=0}^{N-1} f_k$$

- 周期性 (拡張) :

$$F_{m+N} = F_m, \quad F_{-m} = F_{N-m} = F_{2N-m} = \dots$$

- 全周波数範囲 : $0 \sim \omega_s$

- 有効な周波数の範囲 : $0 \sim \frac{\omega_s}{2}$

DFTの性質（実数のデータ）

- F_m は一般的には複素数
- $\omega = 0$ を中心とした対称性
 - $F_{-m} = \overline{F_m}$
 - $\text{Re}[F_{-m}] = \text{Re}[F_m]$
 - $\text{Im}[F_{-m}] = -\text{Im}[F_m]$
 - $|F_{-m}| = |F_m|$
- $\frac{\omega_s}{2}$ の位置を中心に対称
 - $\text{Re}\left[F_{\frac{N}{2}+m}\right] = \text{Re}\left[F_{\frac{N}{2}-m}\right]$
 - $\text{Im}\left[F_{\frac{N}{2}+m}\right] = -\text{Im}\left[F_{\frac{N}{2}-m}\right]$
 - $\left|F_{\frac{N}{2}+m}\right| = \left|F_{\frac{N}{2}-m}\right|$

DFTの性質

- 正規直交基底 :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot n} \right\}$$

- 和の開始位置 :

$$F_m = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N} k \cdot m} = \sum_{k=p}^{N+p-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N} k \cdot m}$$

- 線形性 :

$$\sum_{k=0}^{N-1} (\alpha f_k + \beta g_k) e^{-\frac{2\pi i}{N} k \cdot m} = \alpha \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i}{N} k \cdot m} + \beta \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-\frac{2\pi i}{N} k \cdot m}$$

- パーセバルの等式 :

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |F_m|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |f_k|^2$$

- たたみ込み積分 :

$$(f * g)_k \equiv \sum_{j=0}^{N-1} f_j g_{k-j} \quad (\text{ただし } g_{-j} = g_{N-j})$$

- 逆DFT :

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{+\frac{2\pi i}{N} k \cdot m}$$