２章　複素フーリエ級数

目標

- 複素指数関数$\mathrm{e}^{i\omega t}$に親しむ
- 複素フーリエ展開を使えるようになる
- パーセバルの等式の意味を知る

§2.1 複素指数関数

[複素指数数を使う理由]

$f(t)$のフーリエ展開をすると一般にはサインとコサインの項が現れる．サインとコサインをまとめて一つの関数で表すのが複素指数関数である．フーリエ展開やフーリエ級数は，通常は複素指数関数を用いて表現を簡潔にし，また計算を楽にする．

後に学ぶように，複素指数関数の指数の法則が，三角関数の加法定理を表す．サインを微分するとコサインになり，コサインを微分するとマイナス・サインになるのは，ひとつの複素指数関数の微分で尽くされる．

「フーリエ級数」といえば「複素フーリエ級数」を指し，サインやコサインを用いて書くとき「フーリエ・サイン」「フーリエ・コサイン」「フーリエ三角級数」などと断るのが普通である．

[複素数の基本]

複素数は，2 個の実数の「順序を考慮したペア」すなわち順序対である．2 個のペアに対する四則演算の規則が独特の方法で定められている．その規則を簡単に記述するには**虚数単位**$i=\sqrt{-1}$という要素を導入すると便利である．**複素数**を

$$z=x+i\times y\quad\left(x,y\text{: 実数，}\ i=\sqrt{-1}\text{，以下では}\times\text{を省略}\right)$$

と書き，xを z の**実部**，yを**虚部**といい，$x=\mathrm{Re}[z]$,　$\mathrm{y}=\mathrm{Im}[z]$と表す．

複素数のゼロ元 0 と**単位元** 1 を

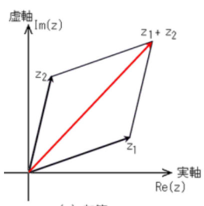
$$0\ =0+0i,\qquad 1=1+0i$$

と定義し，**和と積**の演算を

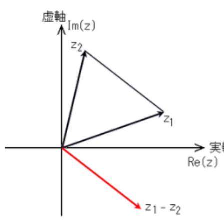
$$\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),\qquad z_1\times z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

と定める．

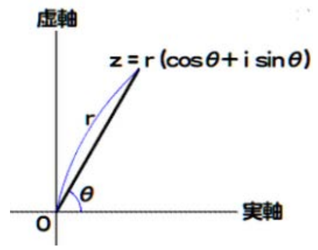
複素数$z=x+iy$は直交座標(x,y)の点と対応する．この座標平面を**複素平面**，x軸を**実軸**(Re)，y 軸を**虚軸**(Im)と呼ぶ．和の規則から，複素数を 2 次元ベクトルと見なしてよい．ベクトル(x,y)の長さを複素数の**絶対値**$|\mathrm{z}|=\sqrt{x^2+y^2}$と呼ぶ．次に導入する**極形式**（座標表示）では絶対値をrやρと表



(a) 加算



(b) 減算



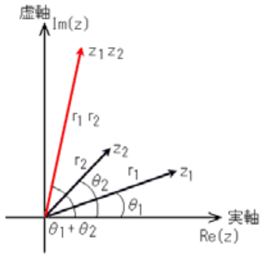
すこともある．このベクトルが実軸(x軸)となす角を反時計回りに測り**偏角**という．偏角をθとすると

$$z = x + iy = r\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}\ \text{同じことだが}\ \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

とも表せる．

極形式を用いると複素数の積を幾何学的に表現できる．サインとコサインの加法定理を使うと



$$z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) = r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

すなわち，絶対値が積，偏角が和となる．

指数関数$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$に$x = i\theta$を代入し実部と虚部に分けて，サインおよびコサインのテーラー展開を逆に利用すると

$$e^{i\theta} = \left\{1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots\right\} + i\left\{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right\} = \cos\theta + i\sin\theta$$

複素数は

$$\boxed{z = r\,e^{i\theta}}$$

とも表示できる．指数の法則を用いると「積→偏角の和」がわかりやすい．

引数が複素数のときでも，指数の法則($e^{iz_1} \times e^{iz_2} = e^{i(z_1+z_2)}$)が成り立つことは，級数による定義から別途確認すべきだが，省略した．

問題 01

次の値を計算し，複素平面上で位置を記せ．

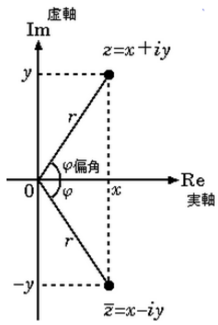
(i) $i^3 =?$,　$\frac{1}{i} =?$

(ii) $e^0 =?$, $e^{\frac{\pi}{2}i} =?$, $e^{\pi i} =?$, $e^{\frac{3}{2}\pi i} =?$, $e^{2\pi i} =?$, $\mathrm{e}^{3\pi i} =?$, $\mathrm{e}^{n\pi i} =?$ (n: 整数)

(iii) $(\sqrt{3} + i)(1 - i) =?$　(極形式で答えよ)

(iv) $-3 = 3\,\mathrm{e}^?$

ある複素数の虚部の符号を反転したものを，その複素数の**複素共役**という（$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$：$\bar{\mathrm{z}}$は z の複素共役である．$\bar{\mathrm{z}}$は z の共役複素数である．z の複素共役をとると$\bar{\mathrm{z}}$になる）．



$$\mathrm{z} + \bar{\mathrm{z}} = 2x, \qquad z - \bar{z} = 2iy, \quad \mathrm{Re}[z] = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}[z] = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

複素共役(complex conjugate)は c.c.と省略することもある（ $\mathrm{z} + \mathrm{c.c.} = 2\mathrm{Re}[\mathrm{z}]$ などと書く）．極形式を用いると

$$\bar{\mathrm{z}} = \overline{re^{i\theta}} = \overline{(r\cos\theta + ir\sin\theta\ )} = r\cos\theta - i\,r\sin\theta\ = r\cos(-\theta) + i\,r\sin(-\theta)\ = re^{-i\theta}$$

したがって，z と$\bar{\mathrm{z}}$は実軸に対して**鏡映**の関係にある．

mathematica 15' 複素数を扱う命令

問題 02

次の関係を確かめよ．

(i) $|e^{i\theta}| = 1$,　$|re^{i\theta}| = r$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|\bar{z}| = |z|$,　$|z^n| = |z|^n$,　$|z|^2 = |z^2| = z\,\bar{z}$,　$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z^2|}$

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,　$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$,　$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(iii) $f(z) = z^3 + z^2 + 1 \to \overline{f(z)} = f(\bar{z})$

(iv) $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$はサインとコサインの加法定理を表す．

[等速円運動を表す複素指数関数]

複素平面の単位円を等速で運動する点（複素数）は$r = 1, \theta = \omega t$だから$e^{i\omega t}$と表せる．反時計回り：$\omega > 0$，時計回り：$\omega < 0$である．

問題 03

つぎの関係を確認せよ：　$\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right] = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} = \cos\omega t$,　$\mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}\right] = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} = \sin\omega t$

問題 04

(i) 1 秒に 10 回振動する現象を表すために$e^{i\omega t}$の形の関数を用いるとき，ωの値は?

(ii) $z(t) = e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} = 2\cos n\omega t$は「時計回りと反時計回りの等速円運動を合成すると実軸上の単振動になる」ことを確認せよ．

(iii) $-e^{-in\omega t} = e^{-i(n\omega t+\pi)}$を計算により確認し，その内容を複素平面上の操作として述べよ．

(iv) $z(t) = e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} = 2i\sin n\omega t$は，虚軸上の単振動となることを確認せよ．

[複素指数関数$e^{i\omega t}$のtによる微分と積分]

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = \frac{d}{dt}(\cos\omega t + i\sin\omega t\,) = (-\omega\sin\omega t + i\omega\cos\omega t\,) = i\omega\,(\cos\omega t + i\sin\omega t\,) = i\omega e^{i\omega t}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}}$$

実数の指数関数e^{at}について$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$を思い出すと，$a \to i\omega$という代入をしただけの式である．

　実数関数について$\frac{d}{dt}F(t) = f(t)$のとき，積分記号を用いて

$$\int f(t)dt = F(t)$$

と書く．複素数が入った関数であっても，$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t} \to \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}\right) = e^{i\omega t}$は積分記号を用いて

$$\boxed{\int e^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}}$$

と表せる．

[複素指数関数の直交関係]

例題 01

複素指数関数の直交関係を調べよ.

解

$\omega=\frac{2\pi}{T}$とすると，$\int e^{i\omega t}dt=\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}$より

$$\int_0^T e^{i\omega t}dt=\frac{1}{i\omega}\left[e^{i\omega t}\right]_0^T=\frac{1}{i\omega}\left[e^{i\omega T}-e^0\right]=\frac{1}{i\omega}\left[e^{i2\pi}-e^0\right]=\frac{1}{i\omega}[1-1]=0$$

これは

$$\int_0^T e^{i\omega t}dt=\int_0^T\{\cos\omega t+i\sin\omega t\}dt=\int_0^T\cos\omega t\,dt+i\int_0^T\sin\omega t\,dt=0+0i=0$$

と計算してもよい.

整数$k\neq 0$とすると

$$\int_0^T e^{ik\omega t}dt=\frac{1}{ik\omega}\left[e^{ik\omega T}-e^0\right]=\frac{1}{ik\omega}\left[e^{i2\pi\times k}-e^0\right]=0$$

$k=n-m,\ n\neq m$のとき

$$\int_0^T e^{ik\omega t}dt=\int_0^T e^{i(n-m)\omega t}dt=\int_0^T e^{in\omega t}\times e^{-im\omega t}dt=\int_0^T e^{in\omega t}\times\overline{e^{im\omega t}}dt=0$$

$n=m$のとき

$$\int_0^T e^{in\omega t}\times\overline{e^{im\omega t}}dt=\int_0^T e^0dt=\int_0^T 1dt=T$$

以上をまとめると

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T e^{in\omega t}\times\overline{e^{im\omega t}}dt=\delta_{mn}},\quad \omega T=2\pi$$

積分区間を変更して

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{in\omega t}\times\overline{e^{im\omega t}}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{in\omega t}\times\overline{e^{im\omega t}}dt=\delta_{mn}$$

とも書くことが出来る．サイン・コサインの直交関係と同じ内容を 1 本の式で表している.

問題 05

3 個の関数 $e^{2\pi it}$，$\overline{e^{3\pi it}}$，$e^{2\pi it}\times\overline{e^{3\pi it}}$について，各々の実部のグラフを重ねて描け．各々の虚部のグラフも重ねて描け.

§2.2 複素フーリエ展開

１章で学んだフーリエ三角級数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\}$$

を複素指数関数で書き換え，複素フーリエ級数の表示を求めよう．そのため

$$\cos n\omega t=\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2}\ ,\qquad \sin n\omega t=\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2i}$$

を代入すると，まず

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2}+b_n\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2i}\right\}$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{in\omega t}+\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-in\omega t}\right\}$$

を得る（自分で確認せよ）．最右辺を書き換えて**複素フーリエ級数**すなわち

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\omega t}}$$

の形にまとめなおしたい．目的はc_nをa_nとb_nで表すこと．総和が一方で$e^{in\omega t}$と$e^{-in\omega t}$を含み$n=1,2,\cdots$，他方で$e^{in\omega t}$だけ含み$n=\cdots,-2,-1,0,1,2.\cdots$となることに留意して式変形をする:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\omega t}=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_ne^{in\omega t}+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{in\omega t}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-in\omega t}+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{in\omega t}$$

$e^{in\omega t}$や$e^{-in\omega t}$の係数どうしを比較すれば，**複素フーリエ係数**c_nと，a_nおよびb_nの関係がわかる：

$$\boxed{c_0=\frac{a_0}{2}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{in\omega t}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{in\omega t}\ \rightarrow\ \boxed{c_n=\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)\cdots n>0}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-in\omega t}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-in\omega t}\ \rightarrow\ \boxed{c_{-n}=\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)=\overline{c_n}\cdots n>0}$$

問題 06

$f(t)$が実数値をとるときフーリエ（三角）係数のa_nおよびb_nは実数である．このとき複素フーリエ級数$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\omega t}$の右辺も実数となることを確認せよ．ヒント：複素共役のペアをつくる．

問題 07

つぎのフーリエ三角級数と同等な複素フーリエ級数を与える複素フーリエ係数を求めよ．

1）$f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}+\cdots+\frac{\cos(2m-1)t}{(2m-1)^2}+\cdots\right)$，$a_0=\pi$，$a_n=\begin{cases}0\cdots n=\text{偶数}\\ -\frac{4}{n^2\pi}\cdots n=\text{奇数}\end{cases}$

2) $f(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\cdots+\frac{\sin(2m-1)t}{2m-1}+\cdots)$, $b_n=\begin{cases}0\cdots n=\text{偶数}\\ \frac{4}{n\pi}\cdots n=\text{奇数}\end{cases}$

複素フーリエ係数を積分で求める式は

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-in\omega t}dt,\quad c_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt \text{ も含む}$$

である.

例題 02

1) 複素フーリエ級数の定義と複素指数関数の直交性　すなわち

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t}\quad \text{と}\quad \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{e}^{in\omega t}\times\overline{e^{im\omega t}}dt\ =\delta_{mn}$$

を用いて複素フーリエ係数の積分の式を求めよ.

2) フーリエ（三角）係数を与える積分の式から

$$\mathrm{c}_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right),\quad c_{-n}=\overline{c_n}$$

を用いて複素フーリエ係数の積分の式(すなわち 1)の答)を求めよ.

解

(i) m を 0 を含む整数として

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\times\overline{e^{im\omega t}}dt\ =\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t}\times\overline{e^{im\omega t}}dt\ =\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}e^{in\omega t}\times\overline{e^{im\omega t}}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,\delta_{mn}=c_m\quad\rightarrow\quad\boxed{c_m=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\times\overline{e^{im\omega t}}dt\ =\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\times e^{-im\omega t}dt}$$

積分区間が一周期なら上（下）限は任意.

(ii) 1 章の結果は

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt,\qquad a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\omega t\,dt,\qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\omega t\,dt$$

したがって

$$\mathrm{c}_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\times 1\,dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\times\underbrace{e^{i\times 0\times\omega t}}_{e^0=1}\,dt$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\omega t\,dt-\frac{2}{T}i\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\omega t\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\times(\cos n\omega t-i\sin n\omega t)dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\times e^{-in\omega t}dt$$

問題 08

偶（奇）関数の複素フーリエ展開は，フーリエ・コサイン級数（フーリエ・サイン級数）に一致することを示せ．

例題 03

周期 Tの関数$f(t)=a\frac{t}{T}$,$0\le t<T$を複素フーリエ展開せよ．

解

$$c_{n\neq0}=\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}}f(t)e^{-in\omega t}dt=\frac{a}{T^2}\int_0^{\mathrm{T}}t\,e^{-in\omega t}dt=\frac{a}{T^2}\left[\left(\frac{1}{(n\omega)^2}+\frac{i}{n\omega}t\right)\mathrm{e}^{-in\omega t}\right]_0^{\mathrm{T}}$$

$$=\frac{a}{T^2}\left[\left(\frac{1}{(n\omega)^2}+\frac{i}{n\omega}T\right)\mathrm{e}^{-in\omega\mathrm{T}}-\frac{1}{(n\omega)^2}\right]=a\left[\left(\frac{1}{(n\omega T)^2}+\frac{i}{n\omega T}\right)\mathrm{e}^{-in\omega\mathrm{T}}-\frac{1}{(n\omega T)^2}\right]$$

$$=a\left[\left(\frac{1}{(2\pi n)^2}+\frac{i}{2\pi n}\right)\mathrm{e}^{-i2\pi n}-\frac{1}{(2\pi n)^2}\right]=\frac{a}{2\pi n}i$$

$$c_0=\frac{a}{T^2}\int_0^{\mathrm{T}}t\,dt=\frac{a}{2}$$

$$\boxed{f(t)=a\frac{t}{T}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2\pi}i\sum_{n=-\infty,\neq0}^{\infty}\frac{1}{n}e^{in\omega t}}$$

mathematica 16

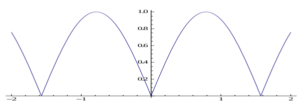
問題 09

例題 03 で得た複素フーリエ級数をフーリエ三角級数になおせ．（1 章 問題 15 を参照せよ）

問題 10

例題 03 の関数を，原点を含む対称な区間$[-T/2,T/2]$で定義し，この区間で積分を行って複素フーリエ係数を求めよ．

問題 11



$f(t)=A|\sin(\Omega t)|$ の周期を確認し，複素フーリエ展開せよ。

mathematica 17

例題 04

周期Tの関数$f(t)$と$g(t)$の**たたみ込み積分**（convolution）を

$$f*g\equiv\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

と定義する（$g(t)$を τ ずらし，重み$f(\tau)$を掛けて寄せ集める．たたみ込み積分は信号を解析するとき頻出）．

$f * g$のフーリエ級数が

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\gamma_n\, e^{in\omega t}$$

となることを示せ．ただし c_nとγ_nはそれぞれ$f(t)$と$g(t)$のフーリエ係数である．

解

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f * g\; e^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-in\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{\tau=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)g(t-\tau)\;\underbrace{e^{-in\omega(t-\tau)}e^{-in\omega\tau}}_{\substack{\uparrow \\ e^{-in\omega t} \\ x\equiv t-\tau}}\,d\tau dt =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{\underbrace{x=-\frac{T}{2}}_{\text{周期関数，始点任意}}}^{\frac{T}{2}} \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)g(x)\;e^{-in\omega x}e^{-in\omega\tau}\,d\tau\;\;\underbrace{dx}_{\substack{dt \\ =d(t-\tau) \\ =dx}}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} g(x)e^{-in\omega x}dx\cdot\frac{1}{T}\int_{\tau=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\;e^{-in\omega\tau}d\tau = \gamma_n c_n$$

メモ たたみ込み積分の応用

画像に対する効果"Motion Blur"は「手ぶれ」のための像のぼけを表現するものだが，数学的には「たたみ込み積分」である．もとの画像の一点x'の明るさ$f(x')$に注目し，$f(x')$から生じる「ぼけた像」$h(x) = f(x')g(x - x')$をつくる．そのうえで，x'を全域にわたって動かし，画像全体についてその効果を重ね合わせる（x'で積分）．ぼけた像から，もとの鮮明な画像を再生するにはどうしたらよいだろう？

音声に対して，残響効果があるホールでの録音は音源からの音と残響効果のたたみ込み積分となる．録音から音源の音を再生するにはどうしたらよいだろう？

mathematica 18 たたみ込み積分の計算例：鐘の余韻が消える前に，等間隔でたたき続けると？

§2.3 パーセバルの等式

１章で，関数をベクトルと考えて積分$\int_{\mathrm{R}} g(t)f(t)dt$は$g(t)$と$f(t)$の内積，$\int_{\mathrm{R}}|f(t)|^2dt$は$f(t)$の「長さ」と見なせることを記した（§1.2 メモ「関数が直交する」）．さらに，基本振動数およびその n 倍の振動数のサインとコサイン（したがってまた，対応する複素指数関数）を直交基底として関数を展開するのがフーリエ展開であることにも触れた．

関数の組$\{\mathrm{e}^{in\omega t}, n = 整数\}$は直交基底系をなす：$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{e}^{in\omega t}\times\overline{e^{im\omega t}}dt\ = \delta_{mn}$

基本振動数ωの周期関数$f(t)$を$\{\mathrm{e}^{in\omega t}\}$で展開した成分：$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}dt$，$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$

3 次元空間ならば，どんなベクトルでも 3 個の基底ベクトルで展開できる（線形結合で表せる）が，基本振動数ωの周期関数$f(t)$は$\{\mathrm{e}^{in\omega t}, n=\text{整数}\}$だけで展開できるのだろうか？$\mathrm{e}^{in\omega t}$以外の関数を必要とすることはないのだろうか？この疑問に答えるのが本節の目的である．

3 次元空間で$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3$と展開するとき，$|\mathbf{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$である（ピタゴラスの定理！）．もし 3 次元空間であることを忘れて$\mathbf{a}\sim a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2$でよいことにしたら，$|\mathbf{a}|^2\neq a_1^2+a_2^2$である．この見地から

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2dt \underbrace{=}_{\text{パーセバルの等式}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2}$$

が成り立つか否かを調べることにする：左辺が関数の「長さ」の 2 乗，右辺が成分から計算した長さの 2 乗である．

例題 05

パーセバルの等式

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2dt \underbrace{=}_{\text{パーセバルの等式}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \underbrace{=}_{\text{書き換え}} \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right)$$

を確認せよ．

解

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}}[f(t)]^2\,dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\omega t}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_me^{im\omega t}\right)dt=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}c_nc_m\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{i(n+m)\omega t}\,dt$$

$$=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}c_nc_m\,\delta_{n,-m}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nc_{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\left|\frac{a_0}{2}\right|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{a_n-ib_n}{2}\right|^2+\left|\frac{a_n+ib_n}{2}\right|^2\right)=\left|\frac{a_0}{2}\right|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{4}+\frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right)$$

こうして「基本振動数ωの周期関数$f(t)$は$\{\mathrm{e}^{in\omega t}, n=\text{整数}\}$だけで展開できる」ことが確認できた．この事実を次のように言う：

三角基底$\{1,\cos n\omega t,\sin n\omega t\}(n=1,2,3,\cdots)$あるいは$\{e^{in\omega t}\}(\mathrm{n}=0,\pm1,\pm2,\cdots)$は，

周期 T の関数の集合で**完全系**をなす

例題 06

$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\omega t}$のとき，「$f(t)\equiv 0$（$\neq 0$が有限個あってもよい)」と「全ての$n$について$\mathrm{c}_n=0$」が同等であることを示せ．

解

パーセバルの等式

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

において，左辺の被積分関数が$f(t)\equiv 0$ならば積分が 0 となり，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=0$. 総和の各項が非負だから，全ての$n$について$|c_n|^2=0$となる．複素数の絶対値が 0 ならばその実部と虚部がともに 0 であり，$c_n=0$となる．.逆に，全てのnについて$c_n=0$ならば$|c_n|^2=0$であり，それらの和も 0 すなわち$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=0$．このとき$\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2dt=0$. 非負の量$[f(t)]^2$の積分（すなわち和）が 0 となるので，区間内いたるところで$[f(t)]^2=0$（ただし有限個の点で 0 と異なる場合，それらの点が積分に寄与しないので，条件から除外できない）．よって，$f(t)\equiv 0$.

問題 12

例題 04「たたみ込み積分のフーリエ係数に関する定理」すなわち$f*g\equiv\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$のフーリエ級数が$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\gamma_n\, e^{in\omega t}$となることを既知としてパーセバルの等式を導け．

問題 13

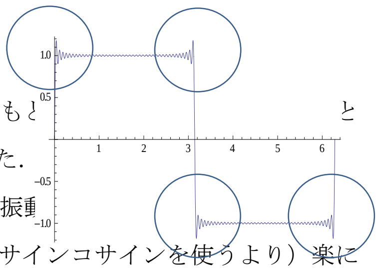
周期2πの関数$f(t)=t^2, -\pi\le t<\pi$ のフーリエ級数が $\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos t}{1^2}-\frac{\cos 2t}{2^2}+\frac{\cos 3t}{3^2}-\cdots\right)$となることを既知として，これにパーセバルの等式 を適用して，$S=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$の値を求めよ．

パーセバルの等式の右辺は無限項の和だが，これを最初の M 項で打ち切ると次の不等式になる:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2dt \ge \sum_{n=-M}^{M}|c_n|^2 : \text{ベッセルの不等式}$$

mathematica 19　矩形波パルスの複素フーリエ係数，ギブスの振動の観察，ベッセルの不等式

§2.5 ギブス振動



1 章§1.7「不連続点におけるフーリエ級数の収束とギブス振動」では，もと　と
き，その不連続点でフーリエ級数が振動するというギブス現象を紹介した．

フーリエ級数の項数を（打ち切りなどせず）無限に増やしても，この振重
突起の大きさの見積もりを数値的に得たい．複素フーリエ級数ならば（サインコサインを使うより）楽に計算できる．

例題 07

矩形波のフーリエ級数のギブス振動による突起の高さを計算せよ．（高級な話題）

解

周期2π の矩形波　$f(t); t=0$ で $-1\rightarrow+1$　のフーリエ級数は

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t+\cdots\right)$$

である．無限項だと取り扱いにくいので，まず第 n 部分和

$$f_n(t)\equiv\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t\right)$$

を考察する． 各項の係数を観察すると，積分で表すと簡単な式になることがわかる（有限の n 項だから微積分自由自在）：

$$f_n(t)=\frac{4}{\pi}\int_0^t(\cos t'+\cos 3t'+\cdots+\cos(2n-1)t')dt'=\frac{4}{\pi}\int_0^t\mathrm{Re}\left[\sum\nolimits_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{i(2k-1)t'}\right]dt'$$

右辺の和を計算すると

$$\sum\nolimits_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{i(2k-1)t}=e^{-it}\times\sum\nolimits_{k=1}^{n}e^{(2it)k}=e^{-it}\times\left(\frac{e^{(2it)(n+1)}-1}{e^{2it}-1}-1\right)=e^{-2it}\times\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(2it)(n+1)}-e^{2it}}{\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})}\right)$$

$$=\frac{1}{i}\left(\frac{e^{2int}-1}{2\sin t}\right)$$

よって

$$\mathrm{Re}\left[\sum\nolimits_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{i(2k-1)t}\right]=\mathrm{Im}\left[\left(\frac{e^{2int}-1}{2\sin t}\right)\right]=\frac{\sin 2nt}{2\sin t}$$

となり

$$\boxed{f_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^t\frac{\sin 2nt'}{\sin t'}dt'}$$

である．第 n 部分和であり，もとの矩形とは形が異なるので，関数の形を調べておく必要がある．とくに，不連続点(原点)に一番近いピークの位置は

$$\frac{df_n}{dt}=\frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^t\frac{\sin 2nt'}{\sin t'}dt'=0\qquad\rightarrow\frac{\sin 2nt}{\sin t}=0\quad\rightarrow\ t_{\mathrm{p,n}}=\frac{\pi}{2n}$$

ピークの高さは

$$f_n(t_{p,n})=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin 2nt'}{\sin t'}dt'=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t''}{2n\sin\left(\frac{t''}{2n}\right)}dt''=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left(\frac{t''}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{t''}{2n}\right)}\frac{\sin t''}{\mathrm{t}''}dt''\xrightarrow[\mathrm{n}\to\infty]{}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t''}{\mathrm{t}''}dt''$$

最後の式は項数を無限に増やしたときの極限のピークの高さ．突起は無くならない！

$\int_0^{\pi}\frac{\sin t''}{\mathrm{t}''}dt''$の値を計算するため，被積分関数をマクローリン展開する：

$$\frac{\sin t}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}\quad\rightarrow\quad\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}x^{2n+1}$$

$x=\pi\sim 3$ とおいて最初の 3 項の和をとると ~ 1.9，もう少し丁寧に計算すると，$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t''}{\mathrm{t}''}dt''\sim 1.85194\ldots$ となり $\lim_{n\to\infty}f_n(t_{p,n})=1.17898\ldots$を得る．突起の高さは約 118%である．

§2.6　スペクトル

スペクトルは分光学という物理学の分野の用語である．たとえば「太陽の光をプリズムで分けると色が連続に変化するスペクトルが見られる」「レーザー光は鋭い線スペクトルをもつ」などのように用いる．用語の使い方を拡張し，なんらかの成分に分解し並べたものを**スペクトル**と呼ぶことにして，広く用いられることになった．たとえば，エルミート行列のスペクトル分解は対角要素に固有値を並べたもの，抗生物質のスペクトルは細菌の種類ごとの抗力を並べたもの．本節で学ぶスペクトルは，音や光のスペクトル表示であり，本来の使い方に近い．

周期関数$f(t)$のフーリエ展開が

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t}$$

のとき，$f(t)$には「振動数$n\omega$の成分がc_n，振動数$-n\omega$の成分がc_{-n}，振動数 0 の DC（直流）成分がc_0」だけ含まれていることになる．

横軸に振動数，縦軸に成分の値をとってスペクトルのグラフを描こう．c_nが複素数なので，その実部と虚部について 2 個のグラフを描く必要がある．場合によるとc_nの絶対値だけを観察すれば十分な情報が得られることもあるだろう．

なお，前章でも触れたが，$|c_n|^2$と$c_n=|c_n|e^{i\phi_n}$のϕ_nとをスペクトルとして表示する場合が多い．前者をパワースペクトル，後者を位相スペクトルと呼ぶ．本章では特に断らないかぎりc_nの実部と虚部を表示したものをスペクトルとした．

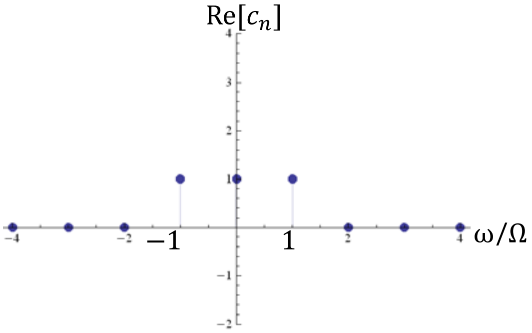
例題 08

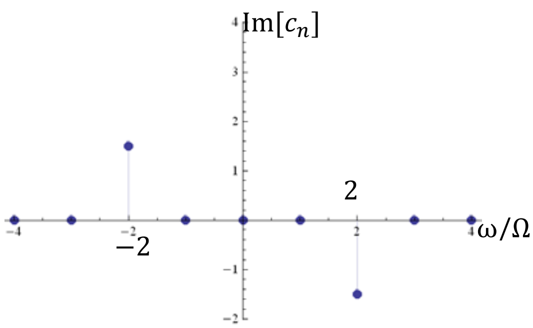
次の関数に含まれる振動数の成分のスペクトルを描け．

$$f(t)=1+2\cos\Omega t+3\sin 2\Omega t=1+2\frac{e^{i\Omega t}+e^{-i\Omega t}}{2}+3\frac{e^{i2\Omega t}-e^{-i2\Omega t}}{2i}$$

$$=1+e^{i\Omega t}+e^{-i\Omega t}-\frac{3}{2}ie^{i2\Omega t}+\frac{3}{2}ie^{-i2\Omega t}$$

解





例題 08 のスペクトルに特徴的なことは

・等間隔：周期関数の成分は，基本振動数とその整数倍の振動数しか含まない．

・正負の振動数：正は反時計まわり，負は時計回りの回転を表し，正負のペアを合成すると振動を表す．

・実部は偶関数，虚部は奇関数：$f(t)$が実数であることに対応して $c_{-n}=\overline{c_n}$となる．

これらの性質は，この例題の関数に限らず一般的になりたつ．

$f(t)$が実数であるという前提があれば，負の振動数の部分を省略することもある．

問題 14

$$f(t)=(\sin t+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\cdots+\frac{\sin(2m-1)t}{2m-1}+\cdots)$$

のスペクトルを$\omega\geq 0$の範囲で描け．

§2.7 複素関数の微分と積分

本章では複素数の値をとる関数$\mathrm{e}^{i\omega t}$（変数は実数 t）を導入した．一般に複素数を変数とし，複素数の値をとる関数を複素関数という．複素関数の微分と積分は非常に美しく応用範囲も広い．次章以降でも複素関数を知っておくと都合の良い例が出る．本節では，複素関数の基本的な部分だけを紹介する（メモ）．

1. 複素関数

- 変数も関数の値も複素数（実変数の実関数を含む）
- $z=x+iy;\quad f(z)=\underbrace{u(x,y)}_{Real}+i\ \underbrace{v(x,y)}_{Real}$
- $z=x+iy,\quad e^z=e^xe^{iy}=e^x\cos y+i\,e^x\sin y,\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \sqrt{z}=\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$

$$\left\{u\to-\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{2}},v\to\frac{2\sqrt{2}x\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}}{2y}\right\}$$

2. 微分可能

- 複素平面上の点z_0で微分可能
  - $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$が存在：
  - $\Delta z\to 0$は「複素平面上のどの方向から近づいても」同じ極限値になる．という強い制約

例

- $f(z)=z^n\qquad \frac{d}{dz}z^n=n\,z^{n-1}$

$$\left(f(z+\Delta z)-f(z)\right)\frac{1}{\Delta z}=\left(z^n+n\,z^{n-1}\Delta z+\frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}-1)}{2}\,z^{n-2}(\Delta z)^2\cdots-z^n\right)\frac{1}{\Delta z}$$

$$=n\,z^{n-1}+\frac{\mathrm{n}\,(\mathrm{n}-1)}{2}\,z^{n-2}\Delta z\cdots\ \to n\,z^{n-1}$$

- $f(z)=z^{\frac{1}{n}}$ $\quad\frac{d}{dz}z^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\,z^{\frac{1}{n}-1}\quad(z\neq 0)$

$a=(z+\Delta z)^{\frac{1}{n}},\ \ b=z^{\frac{1}{n}}\text{:}\ \frac{(z+\Delta z)^{\frac{1}{n}}-z^{\frac{1}{n}}}{\Delta z}=\frac{a-b}{a^n-b^n}=\frac{1}{\underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b+\cdots+b^{n-1}}_{n\text{項　各項が}\mathrm{b}^{n-1}\text{に収束}}}\to\frac{1}{n\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}$

- 例：$f(z)=|z|^2$が微分可能か？

$@\mathrm{z}=0\text{:}\ \ \frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{|z|^2}{z}=\frac{z\,\bar{z}}{z}=\bar{z}\to 0$　微分可能！

$@\mathrm{z}=w\neq 0\text{:}\ \ \frac{f(z)-f(w)}{z-w}=\frac{|z|^2-|w|^2}{z-w}=\frac{z\,\bar{z}-w\bar{w}}{z-w}=\frac{z\,\bar{z}-w\,\bar{z}+w\,\bar{z}-w\bar{w}}{z-w}$

$$=\bar{z}+\frac{w\,\bar{z}-w\bar{w}}{z-w}=\bar{\mathrm{z}}+w\frac{\overline{z-w}}{z-w}$$

$$\to 0+\mathrm{w}\times\begin{cases}1\cdots z-w=\text{実}\\-1\cdots z-w=\text{虚}\end{cases}\quad\text{微分不可能！！}$$

3. **正則(regular)な関数と Cauchy-Riemann の関係式**

- ある領域で微分可能のとき正則という．領域が無限に小さくても（１点ではない）よい
- $f(z)=u+iv$ がある領域で正則なとき，実軸方向($\Delta z=\Delta x$)と虚軸方向($\Delta z=i\Delta y$)の導関数が等しい：

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}(u+iv)\quad\to\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ \&\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}}_{Cauchy-Riemann}\quad\text{or}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0\ \&\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

- $Cauchy-Riemann$が成り立つとき（u,v が十分に滑らかなら）関数は正則である．証明略
- $Cauchy-Riemann$が成り立つとき，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\Delta u=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\Delta v=0$となる
  - 例：　$f(z)=z^2=(x^2-y^2)+2i\,xy,\ \ \Delta(x^2-y^2)=0,\ \Delta(2xy)=0$
  - 例：　$\mathrm{Re}[f]=u=(x^2-y^2)\to\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=+2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x$

$$\to v=\int\frac{\partial v}{\partial x}dx=2xy+\phi(y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=2xy+\psi(x)\to\text{定数を除き }v=2xy$$

- 共役複素数を含む関数は正則ではない.
  - $x=\frac{z+\bar{z}}{2},\ y=\frac{z-\bar{z}}{2i}\ \to\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{i}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$

- 等角写像，直交

4. グリーンの定理

- $\oint P(x,y)dx=\int\{\mathrm{P}(x,\mathrm{s})-\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{s}+\mathrm{ds})\}\mathrm{dx}=-\int\left\{\int\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{P}(x,\mathrm{s})ds\right\}\mathrm{dx}=-\iint\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{P}(x,\mathrm{y})dxdy$

$\oint Q(x,y)dy=\int\{\mathrm{Q}(t+dt,\mathrm{y})-\mathrm{Q}(\mathrm{t},\mathrm{y})\}\mathrm{dy}=\int\left\{\int\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Q}(t,\mathrm{y})dt\right\}\mathrm{dy}=\iint\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Q}(x,\mathrm{y})dxdy$

➢ $\underbrace{\oint\{P(x,y)dx+Q(x,y)dy\}}_{\text{周回積分}}=\underbrace{\iint\{-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\}dxdy}_{\text{面積分}}$

5. 複素積分

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C (u+iv)\,d(x+iy)=\int_C (u\,dx-v\,dy)+i\int_C (vdx+udy)$$

関数の正則な領域における周回積分

$$\oint f(z)\,dz=\oint(udx-vdy)+i\oint(vdx+udy)=-\iint\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy\ +i\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0$$

- $f(z)=e^z=1+z+\frac{1}{2}z^2+\cdots$は複素平面上の全域で正則だからどのような経路の周回積分も

$$\oint e^z dz=0,\quad \text{同様に}\quad \oint e^{z^2}dz=0$$

問題解答

問題 01

次の値を計算し，複素平面上で位置を記せ．

(i) $i^3=?,\ \ \frac{1}{i}=?$

(ii) $e^0=?,\ e^{\frac{\pi}{2}i}=?,\ e^{\pi i}=?,\ e^{\frac{3}{2}\pi i}=?,\ e^{2\pi i}=?,\ e^{3\pi i}=?,e^{n\pi i}=?\,(n\text{:整数})$

(iii) $(\sqrt{3}+i)(1-i)=?$ （極形式で答えよ）

(iv) $-3=3\,e^{?}$

解

(i) $i^3=-i,\ \ \frac{1}{i}=-i$

(ii) $e^0=1,\ e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\ \ e^{\pi i}=-1,\ \ e^{\frac{3}{2}\pi i}=-i,\ e^{2\pi i}=1,\ e^{3\pi i}=-1,\ e^{n\pi i}=(-1)^n$

(iii) $(\sqrt{3}+i)(1-i)=2\,e^{\frac{\pi}{6}i}\times\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}$

(iv) $-3=3\,(-1)=3\,e^{\pi i}$

問題 02

次の関係を確かめよ．

(i) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ \ |\bar{z}|=|z|,\ \ |z^n|=|z|^n\ ,\ \ |z|^2=|z^2|=z\,\bar{z},\ \ \frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z^2|},\ \ |e^{i\theta}|=1,\ \ |re^{i\theta}|=r$

(ii) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\qquad \overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta},\qquad |z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

(iii) $f(z)=z^3+z^2+1\to\overline{f(z)}=f(\bar{z})$

(iv) $e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}e^{i\beta}$はサインとコサインの加法定理を表す．

解

(i)

- $|e^{i\theta}|=|\cos\theta+i\sin\theta|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

- $\left|re^{i\theta}\right| = |r\cos\theta + ir\sin\theta| = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r$
- $|z_1 z_2| = \left|(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2})\right| = \left|r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right| = r_1 r_2 = \left|r_1 e^{i\theta_1}\right|\left|r_2 e^{i\theta_2}\right| = |z_1||z_2|$
- $|\overline{x+\iota y}| = |x-iy| = \sqrt{(x)^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |x+iy|$あるいは$|\bar{z}| = \left|\overline{re^{\iota\theta}}\right| = \left|re^{-i\theta}\right| = r = |z|$
- $|z^n| = |z^{n-1}z| = |z^{n-1}||z|$による数学的帰納法，あるいは$z^n = r^n e^{in\theta}$ を用いる
- $|z^2| = |z|^2 = (x^2+y^2) = (x+iy)(x-iy) = z\,\bar{z}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

(ii)

- $\overline{(x_1+\iota y_1)+(x_2+\iota y_2)} = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{(x_1+\iota y_1)} + \overline{(x_2+\iota y_2)}$
- $\overline{e^{\iota\theta}} = \overline{\cos\theta + \iota\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$
- 三角形の 2 辺の和は他の 1 辺より長い
- $\overline{z^3+z^2+1} = \overline{z^3} + \overline{z^2} + 1 = \bar{z}^3 + \bar{z}^2 + 1 \rightarrow \overline{f(z)} = f(\bar{z})$
- $\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\times(\cos\beta + i\sin\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) +$
  $i\,(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$

問題 04

(i) 1 秒に 10 回振動する現象を表すために$e^{i\omega t}$の形の関数を用いるとき，ωの値は?

(ii) $z(t) = e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} = 2\cos n\omega t$は「時計回りと反時計回りの等速円運動を合成すると実軸上の単振動になる」ことを確認せよ.

(iii) $-e^{-in\omega t} = e^{-i(n\omega t+\pi)}$を計算により確認し，その内容を複素平面上の操作として述べよ.

(iv) $z(t) = e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} = 2i\sin n\omega t$は，虚軸上の単振動となることを確認せよ.

解

(i) $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \times 10\ \mathrm{Hz} \simeq 62.8\ \mathrm{rad/s}$

(ii) 略

(iii) $-e^{-in\omega t} = (-1)e^{-in\omega t} = e^{i\pi}e^{-in\omega t} = e^{-i(n\omega t+\pi)}$

$-e^{-in\omega t}$は，$e^{-in\omega t}$と原点に対して対称な位置にある．$e^{i\theta}$は半径 1 の単位円上にあるので，原点に対して対称な位置はπだけ回転した位置と同等である.

(iv)略

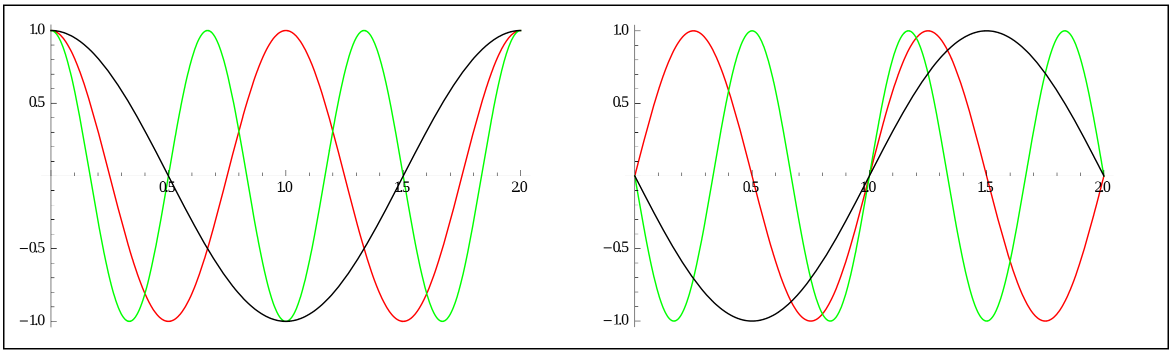
問題 05

3 個の関数 $e^{2\pi i t}$，$\overline{e^{3\pi\iota t}}$，$e^{2\pi i t} \times \overline{e^{3\pi\iota t}}$について，各々の実部のグラフを重ねて描け．各々の虚部のグラフも重ねて描け.

解

赤：$e^{2\pi i t}$，緑：$e^{3\pi i t}$，黒：$e^{2\pi i t} \times \overline{e^{3\pi\iota t}}$

左：実部，右：虚部



問題 06

$f(t)$が実数値をとるときフーリエ（三角）係数のa_nおよびb_nは実数である．このとき複素フーリエ級数$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t}$の右辺も実数となることを確認せよ．ヒント：複素共役のペアをつくる．

解

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t}$の計算において$\{n,-n\}$のペアを先に計算すると，$c_n e^{in\omega t}+c_{-n}e^{-in\omega t}=c_n e^{in\omega t}+c.c.=$ 実数

$c_0=\frac{a_0}{2}$も実数だから, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t}$は実数の和であり実数である．

問題 07

つぎのフーリエ三角級数と同等な複素フーリエ級数を与える複素フーリエ係数を求めよ．

1) $f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}+\cdots+\frac{\cos(2m-1)t}{(2m-1)^2}+\cdots\right)$, $a_0=\pi$, $a_n=\begin{cases}0\cdots n=\text{偶数}\\ -\frac{4}{n^2\pi}\cdots n=\text{奇数}\end{cases}$

2) $f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\cdots+\frac{\sin(2m-1)t}{2m-1}+\cdots\right)$, $b_n=\begin{cases}0\cdots n=\text{偶数}\\ \frac{4}{n\pi}\cdots n=\text{奇数}\end{cases}$

解

1) $c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{\pi}{2}$, $c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{2}a_n=\begin{cases}0\cdots n=\text{偶数}\\ -\frac{2}{n^2\pi}\cdots n=\text{奇数}\end{cases}$, $c_{-n}=c_n$

2) $c_0=\frac{a_0}{2}=0$, $c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=-\frac{i}{2}b_n=\begin{cases}0\cdots n=\text{偶数}\\ \frac{-2i}{n\pi}\cdots n=\text{奇数}\end{cases}$, $c_{-n}=-c_n$

問題 08

偶（奇）関数の複素フーリエ展開は，フーリエ・コサイン級数（フーリエ・サイン級数）に一致することを示せ．

解

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\times e^{-in\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\times(\underbrace{\cos n\omega t}_{偶} - i\underbrace{\sin n\omega t}_{奇})dt$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{偶のとき} \times \left(\underbrace{\cos n\omega t}_{偶}\right) dt \to \dfrac{a_n}{2} \\ \dfrac{-i}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{奇のとき} \times \left(\underbrace{\sin n\omega t}_{奇}\right) dt \to \dfrac{-ib_n}{2} \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + \mathrm{c.c.}) = \begin{cases} \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t) \cdots f = 偶 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin n\omega t) \quad \cdots f = 奇 \end{cases}$$

問題 09

例題 03 で得た複素フーリエ級数をフーリエ三角級数になおせ．（1 章 問題 15 を参照せよ）

解

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{a}{2}, \qquad a_{n\neq 0} = 2\,\mathrm{Re}[c_n] = 0, \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}[c_n] = -2\frac{a}{2\pi}\frac{1}{n} = -\frac{a}{n\pi}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi}\sum_{n=1,\infty} \frac{1}{n}\sin n\omega t}$$

問題 10

例題 03 の関数を，原点を含む対称な区間$[-T/2, T/2]$で定義し，この区間で積分を行って複素フーリエ係数を求めよ．

解

$$f(t) = \begin{cases} a\dfrac{t}{T} \cdots 0 \le t < \dfrac{T}{2} \\ a\left(\dfrac{t}{T}+1\right) \cdots -\dfrac{T}{2} \le t < 0 \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} a\left(\frac{t}{T}+1\right)dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} a\frac{t}{T}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a\frac{t}{T}\,dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} a dt = 0 + \frac{1}{T}\frac{aT}{2} = \frac{a}{2}$$

$$c_{n\neq 0}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} a\left(\frac{t}{T}+1\right)dt+\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} a\frac{t}{T}e^{-in\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a\frac{t}{T}e^{-in\omega t}dt+\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} ae^{-in\omega t}dt=\frac{a}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} te^{-in\omega t}dt+\frac{a}{T}\int_{-T/2}^{0} e^{-in\omega t}dt$$

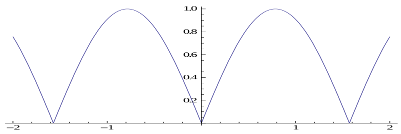
$$=a\left[\frac{1+int\omega}{4n^2\pi^2}e^{-int\omega}\right]_{-T/2}^{T/2}+a\left[\frac{i}{2n\pi}\,e^{-int\omega}\right]_{-T/2}^{0}\underbrace{=}_{*}\frac{a}{4n^2\pi^2}in(-1)^n\left[\left(\frac{\omega T}{2}\right)-\left(-\frac{\omega T}{2}\right)\right]$$

$$+\frac{ai}{2n\pi}[1-(-1)^n]=\frac{a}{4n^2\pi^2}in(-1)^n 2\pi-\frac{ai}{2n\pi}(-1)^n+\frac{ai}{2n\pi}=\frac{ai}{2n\pi}$$

$$*\quad e^{-in\frac{T}{2}\omega}=e^{-in\pi}=\left(e^{-i\pi}\right)^n=(-1)^n=e^{+in\frac{T}{2}\omega}$$

問題 11

$f(t)=A|\sin(\Omega t)|$ の周期を確認し，複素フーリエ展開せよ。



解

基本振動数$\omega=2\Omega$，$T=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{\pi}{\Omega}$, $T\Omega=\pi$となる.

$$e^{i(\pi-2\pi n)}=e^{i\pi}e^{-2\pi ni}=-1\times 1=-1,\qquad e^{-i(\pi+2\pi n)}=e^{-i\pi}e^{-2\pi ni}=-1\times 1=-1$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)e^{-in\omega t}dt=\frac{A}{T}\int_0^{T}\sin(\Omega t)e^{-in\omega t}dt$$

$$=\frac{A}{T}\int_0^{T}\frac{e^{i\Omega t}e^{-in\omega t}-e^{-i\Omega t}e^{-in\omega t}}{2i}dt=\frac{A}{2iT}\left[\frac{e^{i(\Omega-n\omega)t}}{i(\Omega-n\omega)}-\frac{e^{-i(\Omega+n\omega)t}}{-i(\Omega+n\omega)}\right]_0^{T}$$

$$=-\frac{A}{2\pi}\left[\frac{e^{i(\pi-2\pi n)}-1}{(1-2n)}-\frac{e^{-i(\pi+2\pi n)}-1}{-(1+2n)}\right]=-\frac{A}{2\pi}\left[\frac{-1-1}{(1-2n)}+\frac{-1-1}{(1+2n)}\right]$$

$$=\frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{(1-2n)}+\frac{1}{(1+2n)}\right]=\frac{2A}{\pi(1-4n^2)}$$

$$f(t)=A|\sin(\Omega t)|=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}e^{2in\Omega t}$$

問題 12

例題 04「たたみ込み積分のフーリエ係数に関する定理」すなわち$f*g\equiv\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$のフーリエ級数が$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\gamma_n\,e^{in\omega t}$となることを既知としてパーセバルの等式を導け.

解

$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t}$，　$g(t)=\overline{f(-t)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{c_m}e^{im\omega t}$（複素共役の上に t の符号を反転）とおくと，

$$f*g=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)\overline{f(-t+\tau)}d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega\tau}\right)\left(\sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_m} e^{im\omega(t-\tau)}\right) d\tau = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega\tau}\right)\left(\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty} \overline{c_m} e^{im\omega(t-\tau)}\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum\nolimits_{n,m=-\infty}^{\infty} c_n \overline{c_m} e^{im\omega(t)} e^{i(n-m)\omega\tau}\right) d\tau = \sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2\, e^{im\omega t}$$

$t = 0$ のとき ：

$$\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2\, e^{im\omega\times 0} = \sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \cdot 1 = \boxed{\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2},$$

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\overline{f(\tau - t)} d\tau = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)\overline{f(\tau)} d\tau = \boxed{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(\tau)|^2 d\tau}$$

問題 13

周期2πの関数$f(t) = t^2, -\pi \leq t < \pi$ のフーリエ級数が $\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos t}{1^2} - \frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} - \cdots\right)$となることを既知として，これにパーセバルの等式 を適用して，$S = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$の値を求めよ.

解

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\, dt = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}4^2\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) = \frac{\pi^4}{9} + 8 \cdot S$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\, dt = \frac{1}{2\pi \times 5}\left[t^5\right]_0^{\pi} \times 2 = \frac{\pi^5}{5\pi} = \frac{\pi^4}{5} \quad \rightarrow S = \frac{4\pi^4}{45 \cdot 8} = \frac{\pi^4}{90}$$

問題 14

$$f(t) = (\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \cdots + \frac{\sin(2m-1)t}{2m-1} + \cdots)$$

のスペクトルをω ≥ 0の範囲で描け.

解

基本周期$T = 2\pi$，基本振動数$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$$\sin t = -\frac{i}{2}e^{it} + \frac{i}{2}e^{-it} \rightarrow f(t) = -\frac{i}{2}\left(e^{it} + \frac{1}{3}e^{3it} + \frac{1}{5}e^{5it} + \cdots\right) + c.c.$$

$$\mathrm{Re}[c_n] = 0, \quad \mathrm{Im}[c_n] = 0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2\times 3}, 0, -\frac{1}{2\times 5}, \cdots$$