例題 6 パーセバルの等式の意味が分かりません。

テキスト§2.4 を読んで，分からない箇所を特定してください.

例題 8　横軸に$\frac{\omega}{\Omega}$とありますがその意味がわかりません.

関数$f(t)$が周期関数のときに限ってフーリエ展開できる．関数の基本振動数をΩとすると，フーリエ展開にはω=Ω×n　(n=整数)という振動数の複素指数関数が含まれる．そこで横軸の目盛りをω/Ωの値で刻めば，0，±1，±2，±3,…のところだけにスペクトルの値が現れる．ω/Ω軸の目盛りの数字は，何番目の振動数かを表す.

問 2　$|z^n| = |z|^n$が分かりませんでした.

まず$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$である。その証明は

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$とおくと、$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$よりただちに

$$|z_1 z_2| = \left|r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right| = r_1 r_2 \left|e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$$

これをもちいて

$$|z^n| = |z^{n-1} \times z| = |z^{n-1}||z| = |z^{n-2}||z||z| = |z^{n-2}||z|^2 = \cdots = |z|^n$$

となる。

問 4(ⅱ)　答えをお願いします。

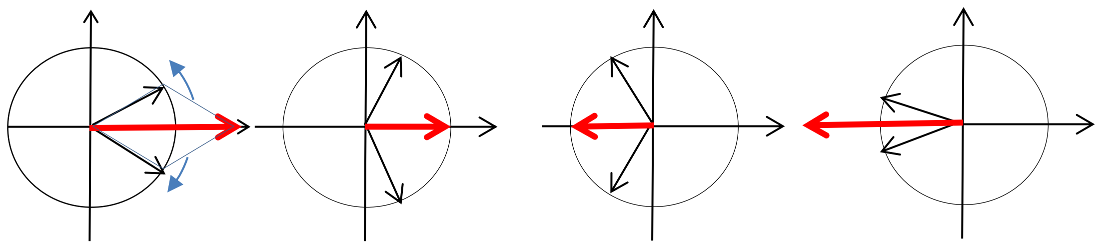
$\omega > 0$のとき、$e^{in\omega t}$と$e^{-in\omega t}$はそれぞれ単位円周上を反時計まわりと時計まわりに角速度ωで回転する点を表す。$2\cos n\omega t$が表す点は、実軸上を振幅 2，角速度$n\omega$で単振動する。こうして、

$$e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} = 2\cos n\omega t$$

という（複素数の計算として成立する）代数的な式を幾何学的に解釈すると

「原点から単位円周上に引いた２つのベクトルが互いに実軸について対称で、それらが反時計まわりと時計まわりに同じ角速度$n\omega$で回転するとき、２つのベクトルの和が実軸上のベクトルとなり振幅２、角振動数$n\omega$の単振動する点を表す」

となる。この事情を簡潔に表現すると「時計回りと反時計回りの等速円運動を合成すると実軸上の単振動になる」



問 4(ⅲ)　何を答えたらよいかわかりませんでした。

計算としては$-e^{-in\omega t} = (-1)e^{-in\omega t} = e^{i\pi}e^{-in\omega t} = e^{-i(n\omega t+\pi)}$よりほかに説明できないのだが・・・複素平面上の操作としては、

・$-e^{-in\omega t} = (-1)e^{-in\omega t}$：

　$(-1)(x+iy) = -x - iy$だから、(-1)倍する操作は点(x,y)を$(-x,-y)$に移す操作であり、言い換えると点(x,y)を原点に対して対称な位置に移動する操作である。

・$(-1)e^{-in\omega t} = e^{\pm i\pi}e^{-in\omega t} = e^{-i(n\omega t \mp \pi)}$:

　(-1)倍すなわち$e^{i\pi}$倍($e^{-i\pi}$**倍でも**-1)するのと，πだけ回転するのが同じことになる．実際，ある点を原点を中心にπだけ回転する

　と原点と対称の位置に移動する.

問 4(ⅳ)　答えをお願いします.

$e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}=2i\sin n\omega t$の右辺は純虚数であり，虚軸上を原点を中心として振幅２，角速度$n\omega$で単振動する．

問５　虚部のグラフという言葉の意味がわかりませんでした。

複素数の値をとる関数$f=u+iv$の実部はu，虚部はvである．これを$u=\mathrm{Re}[f]$, $v=\mathrm{Im}[f]$と書く．

fの実部のグラフとは縦軸に$u=\mathrm{Re}[f]$をとったグラフであり，fの虚部のグラフとは縦軸に$v=\mathrm{Im}[f]$をとったグラフである．

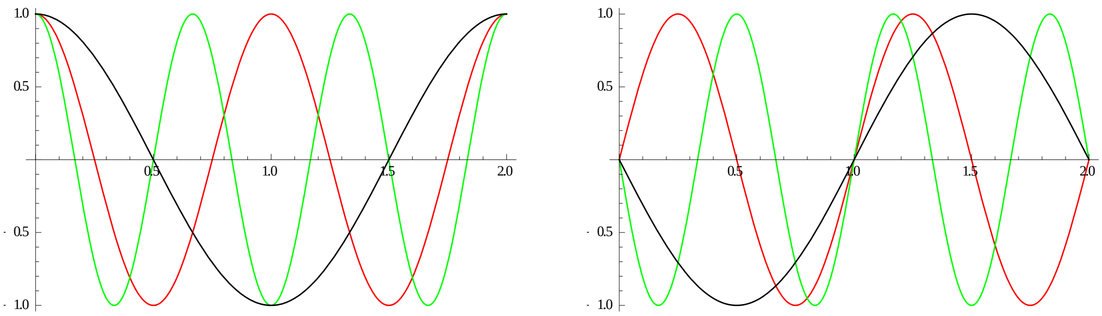
$\mathrm{e}^{2\pi it}=\cos 2\pi t+i\sin 2\pi t,\quad \therefore \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{2\pi it}\right]=\cos 2\pi t,\ \mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{2\pi it}\right]=\sin 2\pi t$

$\overline{\mathrm{e}^{3\pi it}}=\cos 3\pi t-i\sin 3\pi t,\quad \therefore \mathrm{Re}\left[\overline{\mathrm{e}^{3\pi it}}\right]=\cos 3\pi t,\ \mathrm{Im}\left[\overline{\mathrm{e}^{3\pi it}}\right]=-\sin 3\pi t$

$\mathrm{e}^{2\pi it}\times\overline{\mathrm{e}^{3\pi it}}=\mathrm{e}^{2\pi it-3\pi it}=e^{-i\pi t},\quad \therefore \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{2\pi it}\times\overline{\mathrm{e}^{3\pi it}}\right]=\cos\pi t,\quad \mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{2\pi it}\times\overline{\mathrm{e}^{3\pi it}}\right]=-\sin\pi t$

赤：$\mathrm{e}^{2\pi it}$，緑：$\mathrm{e}^{3\pi it}$，黒：$\mathrm{e}^{2\pi it}\times\overline{\mathrm{e}^{3\pi it}}$

左：実部，右：虚部



問８　解答を見ましたが式の変形を理解できませんでした．

$$c_n\underbrace{=}_{\substack{\text{複素フーリエ係数}\\\text{をフーリエサイン}\\\text{とフーリエコサイン}\\\text{の係数で書くと}}}\frac{a_n-ib_n}{2}\underbrace{=}_{\substack{\text{複素フーリエ係数}\\\text{を f(t)から計算}\\\text{で求めるときの}\\\text{定義式は}}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\times e^{-in\omega t}dt\underbrace{=}_{\substack{\text{複素指数関数を}\\\text{サインとコサイン}\\\text{で書くと}}}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\times\left(\underbrace{\cos n\omega t}_{\text{偶関数}}-i\underbrace{\sin n\omega t}_{\text{奇関数}}\right)dt$$

$$=\begin{cases}f(t)\text{が偶関数}\cdots\boxed{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{偶}}\times\left(\underbrace{\cos n\omega t}_{\text{偶}}\right)}_{\text{偶関数}}dt\to\frac{a_n}{2}},\quad \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{偶}}\times\left(\underbrace{\sin n\omega t}_{\text{奇}}\right)}_{\text{奇関数}}dt\underbrace{\to}_{\substack{\text{積分区間が}\\\text{原点を挟んで}\\\text{対称，奇関数}}}0\\ f(t)\text{が奇関数}\cdots\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{奇}}\times\left(\underbrace{\cos n\omega t}_{\text{偶}}\right)}_{\text{奇関数}}dt\underbrace{\to}_{\substack{\text{積分区間が}\\\text{原点を挟んで}\\\text{対称，奇関数}}}0,\quad \boxed{\frac{-i}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{奇}}\times\left(\underbrace{\sin n\omega t}_{\text{奇}}\right)}_{\text{偶関数}}dt\to\frac{-ib_n}{2}}\end{cases}$$

$$f(t)\underbrace{=}_{\substack{\text{複素フーリエ級数}\\\text{の定義式}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\omega t}\underbrace{=}_{\substack{\text{総和の変数 n を}\\\text{正に制限して}\\\text{書き直すと}}}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_ne^{in\omega t}+\underbrace{\mathrm{c.c.}}_{\substack{\text{前項の}\\\text{複素共役.}\\ n\text{が負の場合}\\\text{を書き直したもの}}})=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(c_ne^{in\omega t}\text{の実部})\times 2}_{\text{複素共役との和だから}}$$

$$=\begin{cases}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}\cos n\omega t\times 2\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t)\cdots f=\text{偶関数}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{2}\sin n\omega t\times 2\right)\quad=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos n\omega t)\cdots f=\text{奇関数}\end{cases}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t)$$

問９　解答を詳しく説明してください．

例題３の結果として

$$f(t)=a\frac{t}{T}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2\pi}i\sum_{n=-\infty,\neq 0}^{\infty}\frac{1}{n}e^{in\omega t}$$

を既知とする．すなわち複素フーリエ係数は

$$c_0=\frac{a}{2},\quad c_n=\frac{a}{2\pi n}i,\quad c_{-n}=\overline{c_n}=\frac{-a}{2\pi n}i$$

である．一方，フーリエ三角係数と複素フーリエ係数の関係は

$$\frac{a_0}{2}=c_0,\qquad \frac{a_n-ib_n}{2}=c_n$$

であり

$$\frac{a_0}{2}=c_0=\frac{a}{2},\quad \frac{a_n-ib_n}{2}=c_n=\frac{a}{2\pi n}i$$

となるから

$$\frac{a_0}{2}=\frac{a}{2},\qquad a_{n\neq 0}=2\,\mathrm{Re}[c_n]=0,\qquad b_n=-2\,\mathrm{Im}[c_n]=-2\frac{a}{2\pi}\frac{1}{n}=-\frac{a}{n\pi}$$

よって

$$\boxed{f(t)=\frac{a}{2}-\frac{a}{\pi}\sum_{n=1,\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega t}$$

問 10　定義域を変更したときの関数の形が分かりません．

区間 $[0,T)$で$f(t)=a\frac{t}{T}$の周期関数は，となりの区間$[-T,0)$では「グラフをTだけ左に平行移動した」関数(f_{-1}と書く)

$$f_{-1}(t)=a\frac{(t+T)}{T}=a\left(\frac{t}{T}+1\right)$$

となる．したがって$\left[-\frac{\mathrm{T}}{2},\frac{T}{2}\right)$で定義すると

$$f(t)=\begin{cases}a\dfrac{t}{T}\cdots 0\leq t<\dfrac{T}{2}\\ a\left(\dfrac{t}{T}+1\right)\cdots -\dfrac{T}{2}\leq t<0\end{cases}$$

となる．

問 11 何をどのように計算しているか理解できませんでした．

$f(t)=A|\sin(\Omega t)|$は，サイン関数の負の部分を反転して正としたため，周期がもとのサイン関数の半分になる．同じ事だが基本の振動数が 2Ω である．この関数の複素フーリエ展開は$\omega=2\Omega$として

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\omega t},\quad c_n=\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}}f(t)e^{-in\omega t}dt$$

と書ける．ただし積分に現れる周期Tと「もとのサイン関数の振動数Ω」との関係は

$$T=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{\pi}{\Omega}\quad \text{すなわち}\quad T\Omega=\pi$$

となる．

複素フーリエ係数c_nを求める積分区間$[0,T]$の内部では$0\leq\Omega t\leq\pi$ なので，$\sin(\Omega t)\geq 0$となり

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}}f(t)e^{-in\omega t}dt=\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}}A|\sin(\Omega t)|e^{-in\omega t}dt=\frac{A}{T}\int_0^{\mathrm{T}}\sin(\Omega t)\,e^{-in\omega t}dt$$

となる．オイラーの公式から

$$\sin(\Omega t)=\frac{1}{2i}(e^{i\Omega t}-e^{-i\Omega t})$$

となるので

$$\sin(\Omega t)\,e^{-in\omega t}=\frac{e^{i\Omega t}e^{-in\omega t}-e^{-i\Omega t}e^{-in\omega t}}{2i}=\frac{1}{2i}\left\{e^{i(\Omega-n\omega)t}-e^{-i(\Omega+n\omega)t}\right\}$$

したがって

$$c_n=\frac{A}{T}\int_0^{\mathrm{T}}\sin(\Omega t)\,e^{-in\omega t}dt=\frac{A}{2iT}\int_0^{\mathrm{T}}\{e^{i(\Omega-n\omega)t}-e^{-i(\Omega+n\omega)t}\}dt=\frac{A}{2iT}\left[\frac{e^{i(\Omega-n\omega)t}}{i(\Omega-n\omega)}-\frac{e^{-i(\Omega+n\omega)t}}{-i(\Omega+n\omega)}\right]_0^T$$

$$=-\frac{A}{2\pi}\left[\frac{e^{i(\pi-2\pi n)}-1}{(1-2n)}-\frac{e^{-i(\pi+2\pi n)}-1}{-(1+2n)}\right]$$

ここで

$$e^{i(\pi-2\pi n)}=e^{i\pi}e^{-2\pi ni}=-1\times1=-1,\qquad e^{-i(\pi+2\pi n)}=e^{-i\pi}e^{-2\pi ni}=-1\times1=-1$$

に注意すると

$$c_n=-\frac{A}{2\pi}\left[\frac{-1-1}{(1-2n)}+\frac{-1-1}{(1+2n)}\right]=\frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{(1-2n)}+\frac{1}{(1+2n)}\right]=\frac{2A}{\pi(1-4n^2)}$$

となる．以上をまとめると

$$f(t)=A|\sin(\Omega t)|=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}e^{2in\Omega t}$$

問 12 解答の式を解説してください.

たたみ込み積分の一方の関数のフーリエ展開：$f(\mathrm{t})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t}$,

他方の関数のフーリエ展開：$g(\mathrm{t})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma_n e^{in\omega t}$,

ここで

$$g(t)=\overline{f(-t)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{c_m}e^{im\omega t}$$

とおく．すなわち，$f(t)$の引数のtの符号を反転したうえ，複素共役をとったものをgとする．したがって

$$g(t-\tau)=\overline{f(-(t-\tau))}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{c_m}e^{im\omega(t-\tau)}$$

である．fとgのたたみ込み積分は

$$f*g=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)\overline{f(-(t-\tau))}d\tau$$

となるから，右辺の被積分関数をフーリエ展開でおきかえると

$$f*g=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\omega\tau}\right)\left(\sum_{\mathrm{m}=-\infty}^{\infty}\overline{c_m}e^{im\omega(t-\tau)}\right)d\tau=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\omega\tau}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{c_m}e^{im\omega(t-\tau)}\right)d\tau$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}c_n\overline{c_m}e^{im\omega t}e^{i(n-m)\omega\tau}\right)d\tau\underbrace{=}_{\text{和をとる前に積分する}}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}c_n\overline{c_m}e^{im\omega t}\quad\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{i(n-m)\omega\tau}\,\mathrm{d\tau}$$

右辺の積分は直交関係

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{i(n-m)\omega\tau}\,\mathrm{d\tau}=\delta_{nm}\quad(\text{クロネッカの }\delta:\qquad \mathrm{n=m}\text{ のとき }1,\text{他は }0)$$

を示すので

$$f*g=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_n\overline{c_m}e^{im\omega t}\quad \delta_{nm}\ \underbrace{=}_{\text{2 重の和で}}\ \sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m|^2\,e^{im\omega t}$$

外側の和をとる前にその変数を m に固定する

内側の和をとると，δ_{nm}のために n=m となったところだけが残る

外側の和は，

$c_m\overline{c_m}e^{i\omega mt}$の m についての和

$t=0$のとき 上式の最右辺は

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m|^2\,e^{im\omega\times 0}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m|^2\cdot 1=\boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m|^2},$$

同じく$t=0$のときたたみ込み積分の式は

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)\overline{f(\tau-t)}d\tau=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)\overline{f(\tau)}d\tau=\boxed{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(\tau)|^2d\tau}$$

こうして

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|f(\tau)|^2d\tau=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m|^2$$

すなわちパーセバルの等式が成立する.

問 **14**　横軸がどのような値を取るのか分かりません.

$$f(t)=\sin t+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\cdots+\frac{\sin(2m-1)t}{2m-1}+\cdots$$

この関数の基本周期は$T=2\pi$．したがって，基本振動数は$\frac{2\pi}{\mathrm{T}}=1$である．上式から

基本振動数　ω=1 の振幅が 1

第二高調波の振動数　ω=2 の振幅が 0

第三高調波の振動数　ω=3 の振幅が 1/3

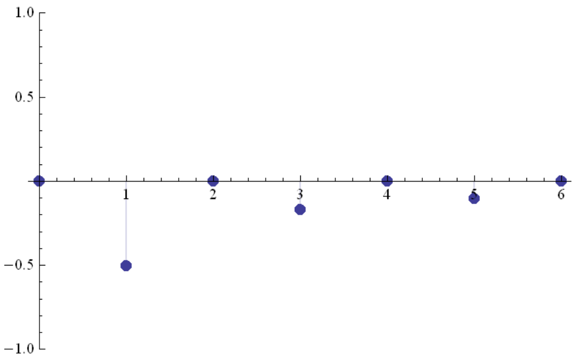
などとなる.

題意は「本来はω<0 の範囲も考えるがここではω ≥ 0 の範囲で描け」ということなので，複素フーリエ係数のスペクトルを論じることになる（フーリエ三角係数のときに負の振動数はありえない．複素フーリエのときは，正と負の振動数が反時計回りと時計回りの回転を意味し，正負のペアを合成して振動を表している）.

$$\sin t=-\frac{i}{2}e^{it}+\frac{i}{2}e^{-it}\to f(t)=-\frac{i}{2}\left(e^{it}+\frac{1}{3}e^{3it}+\frac{1}{5}e^{5it}+\cdots\right)+c.c.$$

こうして，本問の関数の複素フーリエ係数は実部が 0，虚部の偶数番目が 0，奇数番目の振幅が$-\frac{1}{n}$となる.

横軸にωをとると，ω = 0,1,2,3,⋯ のところにだけ振幅が現れ（これはフーリエ級数の一般的な性質)，実部のスペクトルは振幅がすべて 0，虚部のスペクトルが 0 と$-\frac{1}{n}$ が交代する.



振幅と位相のスペクトルを描くこともできる：

$$\mathrm{c_n} = -\frac{i}{2n}e^{nit} = \frac{1}{2n}e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{int}, (\mathrm{n} = \text{奇数})$$

振幅スペクトルは

$$|\mathrm{c_n}| = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} (n = \text{奇数}) \\ 0 \quad (n = \text{偶数}) \end{cases}$$

位相スペクトルは

$$\phi_n = -\frac{\pi}{2}$$