２．単振動の重ね合わせ

単振動は、サインあるいはコサイン関数１個だけで表せる。
それはまた、等速円運動を真横から見た振動運動である。
周期が $\frac{1}{n}T$ の周期関数は周期がTともなるので、
$T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \cdots$と様々な周期の単振動を加え合わせても、その周期は$T$である。
基本周期Tの振動を基本波、
周期$\frac{1}{2}T$の振動を第２高調波あるいは倍波、
などと呼ぶ。
各周波数成分の**振幅、位相**を変えて和をとると、どんな周期関数でも表せる。
「振幅と位相」を「**サインの振幅とコサインの振幅**」に置き換えてもよい。

３．倍音の追加と波形の変化

$$f(t) = sin\,\omega t\ + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\ sin3\omega t + \cdots$$

このような合成はノコギリ波形をつくる。
どの高調波成分の初期位相も 0
振幅が 1：1/2 ：1/3：・・・
と小さくなる。

４．単振動の重ね合わせ vs 円運動の重ね合わせ

単振動の重ね合わせを、円運動の重ね合わせとして理解することもできる。
同じ角周波数のサインとコサインの重ね合わせで、任意の初期位相の単振動をつくることができることは、すでに学んだ。
高調波成分ごとに異なる初期位相と異なる振幅を与えると、さまざまな振動波形を得る。
円運動の重ね合わせとしてみると、回転速度が（整数比で）異なる円運動を重ねる。
半径の比や初期位相を変えると波形が異なる。

５．　フーリエ級数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

の右辺の級数（無限に続く（関）数列の和）をフーリエ三角級数という。

基本周期は 2π、したがって基本区間としては$[0,2\pi]$, $[-\pi,\pi]$ などをとる。

$a_0=0$ であれば、$y=0$のまわりに振動する周期関数となる。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

は，基本周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$ のフーリエ三角級数である.

基本区間としては$[0,T]$, $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$などをとる.

どのnについても$a_n=0$ならば，サインだけの和だから，奇関数になる.

$b_n=0$　ならば，偶関数となる.

前者をフーリエ・サイン級数，後者をフーリエ・コサイン級数と呼ぶ.

注意：定数項を　$\frac{a_0}{2}$　のかわりに a_0 とする流儀もある：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

６．周期的な波形に含まれる　サイン・コサイン成分の抽出

周期Tの関数$f(t)$ について，
もし，どのような高調波成分がどの程度ふくまれているか分かっていれば
すなわち，フーリエ係数が分かって入れば

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

の右辺から関数$f(x)$を再構築できる.
逆に，$f(t)$*の関数の形*から何らかの方法でフーリエ係数を算出できれば,
$f(t)$の高調波成分について知ることが出来る.
このような作業を「スペクトルに分解する」ということがある.
太陽の白色光がプリズムで様々な色（異なる振動数）のスペクトルに分かれるところを想像すればよい.

7.　サインとコサインの直交性

基本周期が等しいサイン，コサインには興味深い性質がある．
異なる周波数のサインどうし，コサインどうし，
あるいはサインとコサイン（同じ周波数でもかまわない）の積をつくり
グラフにプロットすると，基本周期内でx軸の上側の面積と下側の面積が
同じになる．いいかえると，これらの積を基本周期で積分すると 0 となる．
この事実を「基本周期が等しいサインとコサインの関数系は直交する」という．
直交という幾何学の用語を使う理由：

- 2 つのベクトルが直交するとき，内積が 0 である．
- ベクトルの内積は，対応する成分どうしの積の，全成分にわたる和

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

ベクトルが各成分が並んだものであるととらえると
関数も（関数値が並んでいるので）ベクトルとすることができる

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)g(t)dt$$

は，$f(t)$*と*$g(t)$*の積を*区間の端から端まで加える．したがって
この積分を内積とみなすことができる．

8.　サインとコサインの直交性

サイン・コサインの直交関係を書くと

$$\int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t\, dt = \frac{\pi}{\omega}\delta_{nm} = \frac{T}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^T \cos n\omega t \cdot \cos m\omega t\, dt = \frac{\pi}{\omega}\delta_{nm} = \frac{T}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^T \sin n\omega t \cdot \cos m\omega t\, dt = 0$$

ここで

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 \cdots n = m \\ 0 \cdots n \neq m \end{cases}$$

クロネッカのデルタという.

$$\int_0^T \sin^2 n\omega t\, dt = \frac{T}{2}$$ *などは，グラフを見ると計算せずにわかる.*

９．　フーリエ係数

関数$f(x)$が

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

と書かれるとき（「fをフーリエ展開すると」いう），さらにフーリエ係数が一意的に決まるなら（別途証明される）

$f(t)$を用いてフーリエ係数を算出できる：

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt\,,$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt$$

積分区間は，周期の幅があれば，どのようにとっても支障がない.

注意：

定数項を$\frac{a_0}{2}$ではなくa_0とする定義：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$

では

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

他のフーリエ係数の定数因子の分子が２となるのに，第０番目の係数だけ１となる.

以上