1

《教材》　Web page

|==

|cis.k.hosei.ac.jp/~kano

|・　微積分法の応用(フーリエ級数とフーリエ変換)

|==

|　　　1) 以下のリンクで zip フォルダーのダウンロードを実行してください。

|

|　　　2) mathematica ファイル(nb)の実行には mathematica 8 が必要です。

|　　　　　　・ zip ダウンロード

|　　　　　　　　・ zip mathematica nb files(3 MB)

|　　　　　　　　・ zip pdf files (4.7 MB)

|　　　　　　・ DFT (mathematica)

|==

《mathematica 8》

|==

|貸与された PC で **mathematica 8** を利用できる環境を立ち上げてください.

|やりかたが分からない場合には，RAT のメンバーが相談にのってくれると思います.

|

|チュートリアル

|===

《成績評価》

出席（遅刻 10 分まで，課題，中間）＋期末

２．講義の内容

講義は４つの部分から構成される．

第１部　　周期現象とフーリエ級数

１年秋学期の「積分法の基礎と応用」でフーリエ級数を学んだが，その復習を兼ねた導入部分である．

フーリエ級数は，周期関数を三角関数で表現する手法であり，本講の基礎となる．

まず，三角関数の取り扱いを復習し，式の運用で困難を感じることがないようにしておきたい．

つぎに，サインとコサインを用いるフーリエ三角級数を復習する．

周期関数をフーリエ級数に展開すると，その周期現象の波形に含まれる周波数（振動数）成分を知ることができる．フーリエ係数は，各周波数成分の振幅である．

音声信号や画像をスペクトルに分解する手法として，フーリエ級数が不可欠である．

第２部　　複素フーリエ級数

フーリエ三角級数を複素指数関数を用いてを書き直したものが複素フーリエ級数である．

通常，「フーリエ級数」といえば「複素フーリエ級数」を指す．

複素指数関数を使うとサイン・コサインの計算の煩わしさから逃れることができる．

第３部のフーリエ変換の準備となる．

第３部　フーリエ変換

たとえば，短い時間だけ続くパルスは周期現象ではない．

しかし，「そのパルスにどんな周波数成分が含まれるか」という分析は日常的である．

単発現象の周波数成分を知るための方法を学ぶ．

フーリエ変換は，フーリエ係数と同じ内容を持つ量である．

第４部　離散フーリエ変換

第１部～第３部で，信号波形の周波数成分を求める作業を学んだが，

実際に音声や画像のフーリエ変換を行うとき，ユーザーはコンピュータを用いて解析を行う．

現実的な信号の処理では，連続的な信号の一部を切り出す．

さらに信号を離散的にサンプリングし，そのフーリエ変換を離散的に計算する．

離散フーリエ変換には，こうした作業のための人為的な効果が入り込む．

離散フーリエ変換の出力の見方を学ぶ．

３．今回の講義のテーマ

４．周期現象

同じパターンが繰り返し現れるのが周期現象である．
画像ならば空間的な周期現象となり，変数を位置座標とした周期関数で表現される．
音声信号なら時間的な周期現象となり，変数を時間とした周期関数で表される．
空間的にも時間的にも周期的な現象もある．
サイン波を，ある瞬間に写真に撮ると空間的な周期現象となる．
その波を，1 カ所で観測すると，時間的な周期現象となる．
例題 00
周期現象の例を挙げよ．
・その現象を表す周期関数が示す量はどんな物理量か？
・変数は何か．
Demo 01 (01 周期現象.nb）
・mathematica で発生した音声信号の周期性.
・　　〃　　　　画像の周期性
・最も単純な周期運動：等速円運動の周期性
・単純ではない周期運動

５．周期関数

同じパターンが繰り返し現れるのが周期現象である.

画像ならば空間的な周期現象となり，変数を位置座標とした周期関数で表現される.

音声信号なら時間的な周期現象となり，変数を時間とした周期関数で表される.

空間的にも時間的にも周期的な現象もある.

サイン波を，ある瞬間に写真に撮ると空間的な周期現象となる.

その波を，1 カ所で観測すると，時間的な周期現象となる.

例題 00

周期現象の例を挙げよ.

・その現象を表す周期関数が示す量はどんな物理量か？

・変数は何か.

Demo 01 (01 周期現象.nb)

・mathematica で発生した音声信号の周期性.

・　　　〃　　　　　　画像の周期性

・最も単純な周期運動：等速円運動の周期性

・単純ではない周期運動

６．　周期関数

周期Tの周期関数では，$2T$, $3T$, $\cdots, nT, \cdots$も周期である．

実際、

$f(t) = f(t+T)$

上式で両辺に $t \to t+T$ 　のように代入すると

$f(t+T) = f(t+T+T) = f(t+2T)$

したがって

$\forall t,\ f(t) = f(t+2T)$

となり，$2T$も周期である．

数学的帰納法を用いれば，任意の自然数nについてnTが周期となることを示せる．

基本周期

- 一番短い周期
- 繰り返しパターンが全く現れない範囲の大きさ
- とくに断らないときは、基本周期を周期という．

Demo２

mathematica によるグラフ描画の例

７．周期関数

《問題 01》

・周期関数の定義式

　・・　パターンの 1 個分だけを定義すれば十分である

　・・　定義域の大きさは周期Tに等しい

　・・　定義域の左端をどこにとるかは自由だが，その位置により定義式が異なる

・周期関数のグラフ

　・・　横軸の表示範囲を周期Tより広く（できれば 2 周期以上）とる

　・・　周期関数は無限に続く関数なので，横軸の表示範囲の全域でグラフを描く

《Demo3》

再帰的プログラミングによる周期関数の描画

・パターン 1 個分の領域で与えられた定義式を用いて，プログラミングによりグラフを描く

・プログラミング言語が再帰を許しているなら，再帰プログラミングを使える.

８．等速円運動と単振動

最も単純で基本的な周期現象

- 等速円運動
- これを横から見ると、単振動（サイン関数）になる
- 単振動も基本的な周期現象である

Demo 4　アニメーション（等速円運動を横から見る.nb）

原点を中心とする半径Aの円

- 円周上の点(x, y)
- 動径とx軸のなす角θ　（正：反時計回りに測る）
- $x = A\cos\theta$, $y = A\sin\theta$

円周上を等速で回る点

- $\theta = \omega t$（$\omega > 0 \rightarrow$ *反時計回り*）
- 時刻$t = 0$にx軸上にある

角速度

- θの時間的な変化の割合：$\frac{d\theta}{dt}$

等角速度

- $\frac{d\theta}{dt} = \omega =$ *一定*

等速

- 円周上の移動距離 $s = A\theta$
- 速さ：　$\frac{ds}{dt} = A\frac{d\theta}{dt} = A\omega =$ *一定*

周期と角速度

- $\theta = \omega t \rightarrow 2\pi = \omega T$　（一周に要する時間T）
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

単振動

- 等速円運動を真横から見たときの振動
- $(A\cos\omega t, A\sin\omega t)$の成分が単振動
  - ・・　x軸方向から見る：　$A\sin\omega t$
  - ・・　y軸方向から見る：　$A\cos\omega t$
  - ・・　中間的な方向から見る：　$A\cos(\omega t + \varphi)$
- 角速度と同じ量ωを角周波数（角振動数）という.
  - ・・　周波数（振動数）　$f = \frac{\omega}{2\pi}$
- 振幅　A

問題 02 周期、角速度、振幅などの基本を確認

問題 03 等速円運動する点の座標を確認

例題 02 サイン関数の周期をTとする式変形

９．位相

三角関数（あるいは単振動）の位相

位相：三角関数の引数の部分（角度の部分）

初期位相：$t=0$における位相

例　$A\sin(\omega t+\varphi)$　の時刻tにおける位相は$\omega t+\varphi$

　　　　　　〃　　　　の初期位相はφ

同じ振動数のサインとコサインを加える

・振幅を調整すると、任意の初期位相のサインあるいはコサインをつくれる

$$A\sin\omega t+B\cos\omega t$$

$$=\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t\right)$$

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2+\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=1$$

$$\to\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\varphi,\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\varphi\ \text{とおける。}$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\psi,\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\psi\ \text{とおいてもよい。}$$

→

$$A\sin\omega t+B\cos\omega t=\sqrt{A^2+B^2}(\cos\varphi\sin\omega t+\sin\varphi\cos\omega t)=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$=\sqrt{A^2+B^2}(\sin\psi\sin\omega t+\cos\psi\cos\omega t)=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t-\psi)$$

１０．基本の確認

以上