フーリエ級数 B

教材：cis.k.hosei.ac.jp/~kano
Mathematica 8

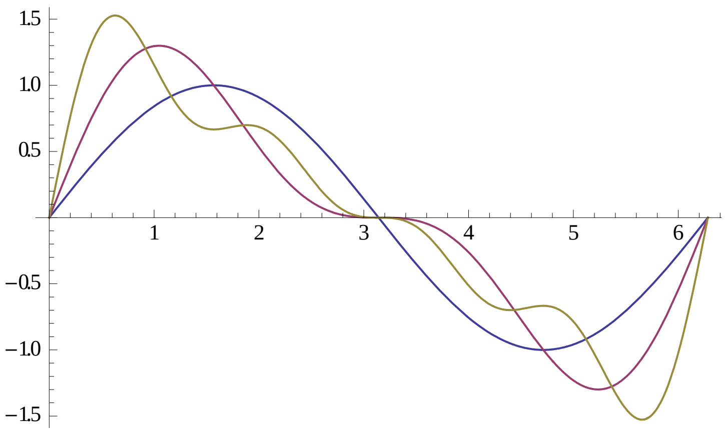
単振動の重ね合わせ

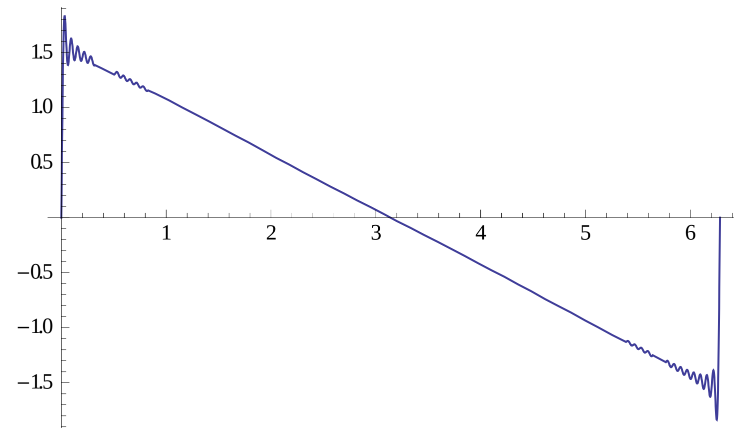
- 単振動ではない周期関数
  - 基本波 ：周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$、角周波数：ω
  - 第n高調波 ：周期$\frac{1}{n}T=\frac{2\pi}{n\times\omega}$, 角周波数：$n\omega$
  - $A_n\cos(n\omega t), B_n\sin n\omega t, n=0,1,2,\cdots$

  - 重ね合わせで一般の周期関数をつくる
  - 周期関数を、これらの成分に展開する
  - 周波数スペクトル

倍音の追加と波形（音色）の変化

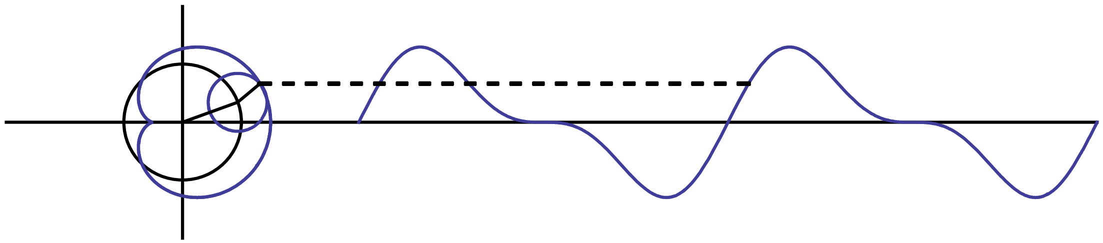
- $\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots$



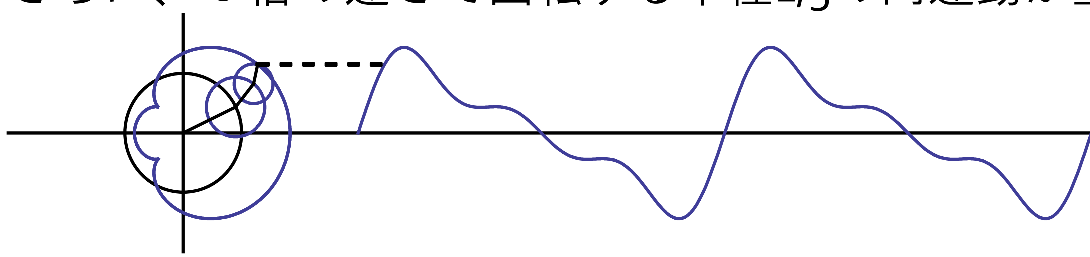


単振動の重ね合わせと円の重ね合わせ

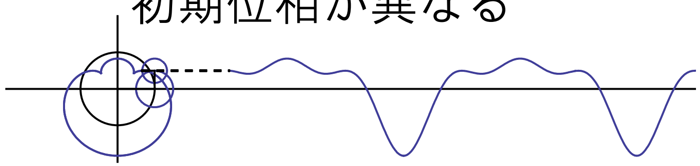
基本波と第２高調波の　振幅が　１：½、初期位相　0
基本波を表す半径１の等速円運動に、倍の速さで回転する半径1/2の円運動が重なる



さらに、３倍の速さで回転する半径1/3の円運動が重なる



初期位相が異なる



Demo 05B　フーリエ級数の円表現.nb

フーリエ級数

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)}$$

- 基本周期： 2π, 基本区間: $[0,2\pi],[-\pi,\pi]$など
- a_0　ベースライン

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)}$$

- 基本周期 ：$T = \frac{2\pi}{\omega}$, 基本区間：$[0, T], [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$など

$a_n = 0 \rightarrow f(t)$奇関数,　　$b_n = 0 \rightarrow f(t)$偶関数

周期的な波形に含まれる サイン・コサイン成分の抽出　1

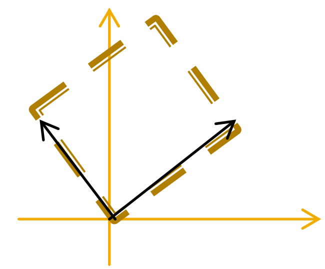
基本周期Tの関数$f(t)$の高調波成分を求める：

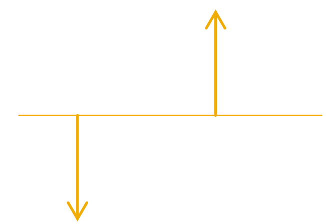
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

のフーリエ係数a_n, b_nを$f(t)$から計算する方法が必要になる.

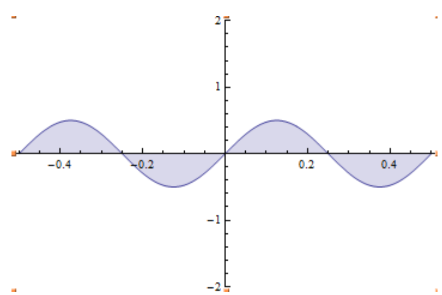
サインとコサインの直交性

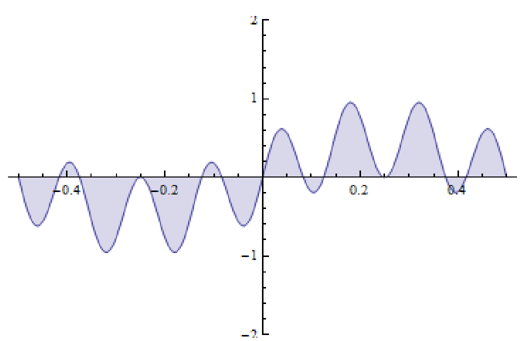
- 直交：成分ごとの積の和が0
- １周期内で正の面積＝負の面積
- 関数の積の積分=0で判定





Demo 8 直交性





サイン・コサインの直交性

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, dt = \int_0^{2\pi} \sin nt\, dt = 0,$ 2) $\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \cos mt\, \mathrm{dt} = 0$

3) $\int_0^{2\pi} \sin nt \cdot \sin mt\, \mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \cos mt\, \mathrm{dt} = \pi\, \delta_{mn}$ ここで$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 \cdots n = m \\ 0 \cdots n \neq m \end{cases}$

$$\int_0^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t \\ \cos n\omega t \cdot \cos m\omega t \end{Bmatrix} \mathrm{dt} = \frac{\pi}{\omega} \delta_{mn} = \frac{\mathrm{T}}{2} \delta_{mn}, \qquad \int_0^{\mathrm{T}} \sin n\omega t \cdot \cos m\omega t\ \ \mathrm{dt} = 0$$

クロネッカのδ

周期関数の積分範囲　　Demo 09

数式処理　　Demo 10

フーリエ係数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\,, \qquad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt\,, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin mt\,dt$$

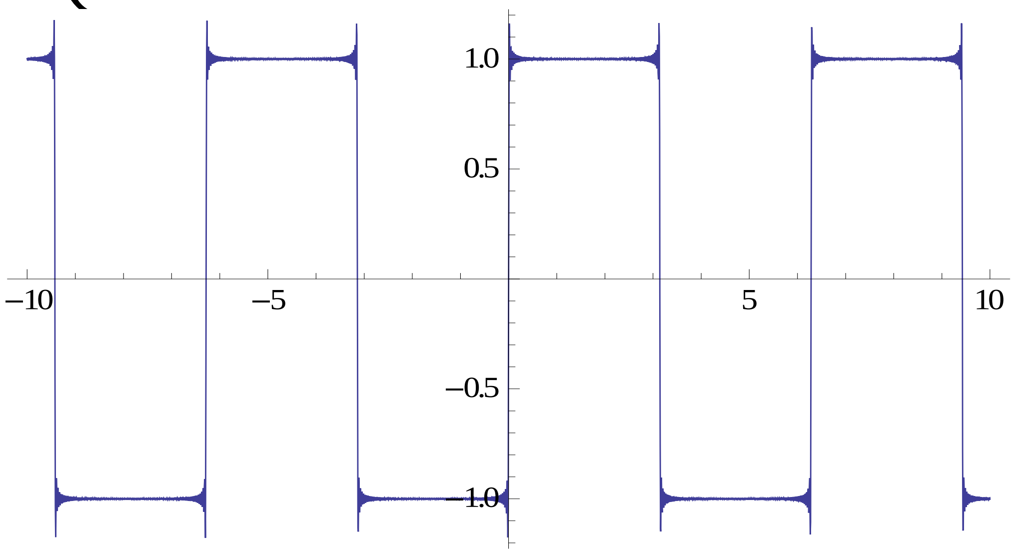
$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos mt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt\,,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt$$

例題

- $f(t) = \begin{cases} 1 \cdots 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ -1 \cdots \dfrac{T}{2} < t < T \end{cases}$



解

矩形波±1，duty 50%，原点でジャンプ

$a_0 = 0, \quad a_n = 0$ (奇関数)

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-1)\sin n\omega t\,dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}}(+1)\sin n\omega t\,dt\right) =$$

$$\frac{2}{n\omega T}\left([\cos n\omega t]_{-\frac{T}{2}}^{0} - [\cos n\omega t]_{0}^{\frac{T}{2}}\right) = \frac{2}{n\omega T}\left(1-\cos\left(-\frac{n\omega T}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\omega T}{2}\right) + 1\right)$$

$$= \frac{2}{n\omega T}\times 2\left(1-\cos\left(\frac{n\omega T}{2}\right)\right) = \frac{2}{n\cdot 2\pi}\times 2\left(1-\cos\left(n\cdot\frac{2\pi}{2}\right)\right) = \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

$$= \begin{cases} 0 & \cdots n\text{が偶数} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \cdots n\text{が奇数} \end{cases}$$

- $f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right)$