4 章　問題 4－4

1. 次の定積分を求めよ.

(1) $\int_1^3 (8x-3x^2)dx$

$$\int (8x-3x^2)\,dx = 4x^2 - x^3 + C,\quad \int_1^3 (8x-3x^2)dx = [4x^2-x^3]_1^3 = (36-27)-(4-1) = 9-3 = 6$$

(2) $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} + \mathrm{C} = 2\sqrt{x} + \mathrm{C},$$

被積分関数は積分区間内で連続：$\displaystyle\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^9 = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{1} = 2\cdot 3 - 2 = 4$

(3) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-4}$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{(x+2)(x-2)} = \int \left\{\frac{-\frac{1}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2}\right\}dx = -\frac{1}{4}\log|x+2| + \frac{1}{4}\log|x-2| + C = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \mathrm{C}$$

被積分関数は偶関数，積分区間が原点に関して対称な領域なので

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-4} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4} = 2\times\frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left\{\log\left|-\frac{1}{3}\right| - \log|-1|\right\} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{3}\right) - 0 = -\frac{1}{2}\log 3$$

Q. 答えを$\frac{1}{4}\log\frac{1}{9}$という書き方にしてもよいですか.

A. 対数の計算($\log\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2\log\left(\frac{1}{3}\right) = 2\times(-\log 3)$など)ができないのかと思われてしまいます．さらに，$\log\left(\frac{1}{3}\right)$をそのままにしておくと，計算するときに$\log(0.33\cdots)$の値を求めることになり避けられたはずの丸め誤差が生じます.

(4) $\int_{-4}^{-2}\sqrt{x^2-1}\,dx$

部分積分による：$\displaystyle\int\sqrt{x^2-1}\,dx = \int 1\cdot\sqrt{x^2-1}\,dx = x\cdot\sqrt{x^2-1} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$$\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int\sqrt{x^2-1}\,dx + \int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx = x\cdot\sqrt{x^2-1} - \left\{\int\sqrt{x^2-1}\,dx + \int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx\right\} \Rightarrow 2\int\sqrt{x^2-1}\,dx = x\cdot\sqrt{x^2-1} - \int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx \underbrace{=}_{\substack{\text{第二項は}\\ \text{例題 4.2}}} \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|$$

別解， 双曲線関数で置換：$x = \cosh t$，$\sqrt{x^2-1} = \sinh t$，　$(*)\ t = \log|x+\sqrt{x^2-1}|$　，$dx = \sinh t\ dt$，

$\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t = 1 + 2\sinh^2 t$，　$\sinh 2t = 2\sinh t\cosh t$　(2 章　演習[4])

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx = \int\sinh t\times\sinh t\ dt = \int\sinh^2 t\,dt = \int\frac{\cosh 2t - 1}{2}dt = \frac{1}{4}\sinh 2t - \frac{1}{2}t + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\sinh t\cosh t - \frac{1}{2}t + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

(*)　$x = \cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\ \Rightarrow (e^t)^2 - 2x(e^t) + 1 = 0\ \Rightarrow (e^t) = x + \sqrt{x^2-1} \Rightarrow\ t = \log|x+\sqrt{x^2-1}|$

○ 定積分： $\displaystyle\int_{-4}^{-2}\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]_{-4}^{-2}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left((-2)\sqrt{(-2)^2-1}-\log\left|(-2)+\sqrt{(-2)^2-1}\right|\right)-\left((-4)\sqrt{(-4)^2-1}-\log\left|(-4)+\sqrt{(-4)^2-1}\right|\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left((-2)\sqrt{3}-\log\left|(-2)+\sqrt{3}\right|\right)-\left((-4)\sqrt{15}-\log\left|(-4)+\sqrt{15}\right|\right)\right\}=2\sqrt{15}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{4-\sqrt{15}}{2-\sqrt{3}}\right|$$

(5) $\int_0^2 x^2e^{-3x}dx$

$$\int x^2e^{-3x}\,dx=x^2\cdot\frac{e^{-3x}}{-3}-\int(2x)\cdot\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)dx=-\frac{1}{3}x^2e^{-3x}+\frac{2}{3}\int xe^{-3x}\,dx$$

$$\int xe^{-3x}\,dx=x\cdot\frac{e^{-3x}}{-3}-\int(1)\cdot\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)dx=-\frac{1}{3}xe^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx=-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+C'$$

$$\int x^2e^{-3x}\,dx=-\frac{1}{3}x^2e^{-3x}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+C'\right)=\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{2}{27}\right)\mathrm{e}^{-3x}+\mathrm{C}$$

$$\int_0^2 x^2e^{-3x}dx=\left[\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{2}{27}\right)\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^2=\left(-\frac{50}{27}e^{-6}\right)-\left(-\frac{2}{27}\mathrm{e}^0\right)=\frac{2}{27}-\frac{50}{27}e^{-6}$$

(6) $\int_0^{\pi/2}x^3\sin x\ dx$

$$\int x^3\sin x\,dx=x^3\cdot(-\cos x)-\int(3x^2)\,(-\cos x)dx=-x^3\cos x+3\int x^2\cos x\,dx$$

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\cdot(\sin x)-\int(2x)\,(\sin x)dx=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx$$

$$\int x\sin x\,dx=x\cdot(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+\mathrm{C}'$$

$$\int x^3\sin x\,dx=-x^3\cos x+3\left(x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx\right)=-x^3\cos x+3\big(x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x+\mathrm{C}')\big)$$

$$=-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C$$

$$\int_0^{\pi/2}x^3\sin x\ dx=[-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x]_0^{\pi/2}=3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-6=\frac{3}{4}\pi^2-6$$

(7) $\int_1^{\sqrt{5}}x\sqrt{x^2-1}\,dx$

置換： $t=x^2-1,\qquad dt=2xdx,\quad x{:}\,1\to\sqrt{5}\Rightarrow t{:}\,0\to 4$

$$\int x\sqrt{x^2-1}\ dx=\int\sqrt{x^2-1}\ \frac{2xdx}{2}=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\ dt=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$\int_1^{\sqrt{5}}x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{3}[t^{\frac{3}{2}}]_0^4=\frac{1}{3}4^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}2^3=\frac{8}{3}$$

(8) $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$　　(積分関数が区間の上端で発散するから広義積分だが，置換により通常の積分となる)

置換 $x+1=2\sin^2 t$,　$x{:}-1\to 1\Rightarrow \mathrm{t}{:}\,0\to\dfrac{\pi}{2}$　　$dx=4\sin t\cos t\ dt$

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int\sqrt{\frac{2\sin^2 t}{1-(2\sin^2 t-1)}}\ 4\sin t\cos t\ dt=\int\sqrt{\frac{2\sin^2 t}{2\cos^2 t}}\ 4\sin t\cos t\ dt=4\int\sin^2 t\,dt=2\int(1-\cos 2t)\,dt$$

$$=2t-\sin 2t+C$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = 2\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = [2t-\sin 2t]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

別解

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\times\sqrt{\frac{1+x}{1+x}}dx = \int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\frac{\cos t\, dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \mathrm{dt} = t + C_1 = \arcsin x + C_1$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C_2 = -\sqrt{1-x^2} + C_2$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \left[\arcsin x - \sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

2. $f(x)$は$-a \le x \le a$で連続であるとする．次のことを証明せよ．

(1) $f(x)$が偶関数ならば，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$

(2) $f(x)$が奇関数ならば，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Q.どのような意図で$t=-x$と置いたのかが分かりません．$\int_{a}^{0}$　を$\int_{0}^{a}$　と置き直すところが分かりません．

A. 定義域内のすべてのxについて，偶関数は$f(x)=f(-x)$，奇関数は$f(x)=-f(-x)$と定義されます．

対称のペアについて考察するために，積分区間を原点を挟んで 2 つに分ける：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

偶関数や奇関数の定義は，$f(x)$と$f(-x)$の比較で与えられるから，$f(-x)$を被積分関数としたいのですが，そのためには変数を$-x$に変更しなければなりません．

同じ変数名のまま負号を付け替えると混同する恐れがあるから

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(t)dt$$

と変数を書き換えたうえで　$t=-x$　とおくと，新しいxの積分区間は$x\colon a \to 0$となり，$a>0$なので，変数は大きい値から小さい値に向かって変化します．また，$dt = \frac{dt}{dx}dx = -dx$です：

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(-x)\times(-dx) = -\int_{a}^{0} f(-x)dx$$

積分の上端と下端を交換し，積分の「向き」を反転すると，積分値の負号が反転するので

$$-\int_{a}^{0} f(-x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{0}^{a} f(x)dx \ \cdots 偶関数 \\ \displaystyle -\int_{0}^{a} f(x)dx \cdots 奇関数 \end{cases}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \begin{cases} \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx & \cdots \text{偶関数} \\ -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0 & \cdots \text{奇関数} \end{cases}$$