4 章　問題 4－2

1. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\int (x+1)^5 dx$

$$t = x+1,\quad dt = dx,\qquad \int (x+1)^5 dx = \int t^5\, dt = \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{6}(x+1)^6 + C$$ (第一項にも定数が含まれている)

(2) $\int x^2(x^3+2)^4 dx$

$$t = x^3+2,\quad dt = 3x^2dx,\quad \int x^2(x^3+2)^4\, dx = \int t^4 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{15}(x^3+2)^5 + C$$

(3) $\int \cos(6x+8)\, dx$

$$t = 6x+8,\qquad dt = 6dx,\quad \int \cos(6x+8)\, dx = \int \cos t \frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int \cos t\, dt = \frac{1}{6}\sin t + C = \frac{1}{6}\sin(6x+8) + C$$

(4) $\int \sin^2 x \cos x\, dx$

$$t = \sin x,\qquad dt = \cos x\ dx,\quad \int \sin^2 x \cos x\, dx = \int t^2\, dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

(5) $\int x\sqrt{1-2x^2}dx$

$$t = 1-2x^2,\qquad dt = -4xdx,\quad \int x\sqrt{1-2x^2}dx = \int \sqrt{t}\left(\frac{dt}{-4}\right) = -\frac{1}{4}\int \sqrt{t}\, dt = -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} = -\frac{1}{6}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(6) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

$$t = \frac{x}{a},\quad dt = \frac{1}{a}dx,\quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{adt}{(at)^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\arctan t + C = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

2. 次の不定積分を求めよ．

(1) $\int x\sqrt{1+x}dx$

$$u = x,\qquad v' = \sqrt{1+x}\quad \Rightarrow\quad u' = 1,\quad v = \int \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int x\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C$$

(2) $\int x\cos x\, dx$

$u = x,\qquad v' = \cos x\quad \Rightarrow\quad u' = 1,\quad v = \sin x$

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C$$

(3) $\int x^2\log x\, dx$

$$u = \log x,\qquad v' = x^2\quad \Rightarrow\quad u' = \frac{1}{x},\quad v = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x^2\log x\, dx = \frac{1}{3}x^3\log x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}dx = \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

(4) $\int \log(x^2+4)\, dx$

$$u = \log(x^2+4),\qquad v' = 1\quad \Rightarrow\quad u' = \frac{2x}{x^2+4},\quad v = x$$

$$\int \log(x^2+4)\, dx = x\log(x^2+4) - \int \frac{2x^2}{x^2+4}dx$$

$$\int \frac{2x^2}{x^2+4}dx = \int \frac{2(x^2+4)-8}{x^2+4}dx = \int 2\,dx - 8\int \frac{1}{x^2+4}dx = 2x - 8\times\left(\frac{1}{2}\right)\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}'$$

$$\int \log(x^2+4)\,dx = x\log(x^2+4) - \left(2x - 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}'\right) = x\log(x^2+4) - 2x + 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}$$

(5) $\int x^2\, e^x dx$

$u = x^2,\quad v' = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = 2x,\quad v = e^x$

$$\int x^2\, e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx$$

$u = x,\quad v' = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = 1,\quad v = e^x$

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C'$$

$$\int x^2\, e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + C') = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

(6) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{(x^2+1-x^2)dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{(x^2+1)} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = \arctan x - \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{\frac{x}{2}\cdot 2x}{(x^2+1)^2}dx,\ \ u = \frac{x}{2},\ \ v' = \frac{2x}{(x^2+1)^2},\ \ v = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{-1}{(t+1)} = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{2}\cdot\frac{-1}{x^2+1} - \int \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \arctan x - \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) + C\right) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)} + C$$

部分積分法を使わない別解

置換：$x = \tan\theta,\qquad \frac{1}{x^2+1} = \cos^2\theta,\ \ dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int (\cos^2\theta)^2\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta + C = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + C = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta + C$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta + 1} + C = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \mathrm{C}$$

教科書 p.86 の「漸化式」の応用

$$J_m = \int \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^m}dx,\qquad m = 1,2,3,\dots$$

$$\Rightarrow\ J_1 = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + C\,,\qquad J_m = \frac{1}{b^2}\left\{\frac{1}{2(m-1)}\frac{(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}J_{m-1}\right\}$$

本問の積分は$a = 0, b = 1$ としたときのJ_2に一致する:

$$J_2 = \frac{1}{1^2}\left\{\frac{1}{2(2-1)}\frac{(x-0)}{[(x-0)^2+1^2]^{2-1}} + \frac{2\times 2-3}{2\times 2-2}\cdot\left(\frac{1}{1}\arctan\left(\frac{x-0}{1}\right) + C'\right)\right\} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + \mathrm{C}$$

3. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+3)} = \frac{(A+B)x + 3(A-B)}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow (\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 0, (\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x^2-9}=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right\} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{6}\left\{\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{x+3}\right\}=\frac{1}{6}\{\log|x-3|-\log|x+3|\}+C=\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$$

(2) $\int\frac{7x-1}{x^2-x-6}dx$

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{(A+B)x-(3A-2B)}{(x+2)(x-3)}$$

$$A+B=7,\qquad 3A-2B=1\quad\Rightarrow A=3, B=4$$

$$\frac{7x-1}{x^2-x-6}=\frac{3}{(x+2)}+\frac{4}{(x-3)},$$

$$\int\frac{7x-1}{x^2-x-6}dx=\int\frac{3}{(x+2)}dx+\int\frac{4}{(x-3)}dx=3\log|x+2|+4\log|x-3|+C$$

(3) $\int\frac{(x^2+2x)}{(x^2+4)(x-2)}dx$

$$\frac{(x^2+2x)}{(x^2+4)(x-2)}=\frac{Ax+B}{(x^2+4)}+\frac{C}{(x-2)}$$

C:　両辺に$(x-2)$をかけて $x=2$ を代入：

$$C=\frac{(x^2+2x)}{(x^2+4)(x-2)}\times(x-2)\Bigg]_{x=2}=\frac{2^2+2\times2}{2^2+4}=1$$

A:　右辺を通分すると分子には$Cx^2=x^2$ が含まれ，左辺のx^2の係数と一致するから，$A=0$となる．

（$A\neq0$ だとAx^2がさらに追加されることになって計算があわない）．

B:　両辺に $x=0$ を代入：

$$\frac{(0^2+2\times0)}{(0^2+4)(0-2)}=0=\frac{B}{(0^2+4)}+\frac{1}{(0-2)}=\frac{B}{4}-\frac{1}{2}\ \Rightarrow B=2$$

積分：

$$\int\frac{(x^2+2x)}{(x^2+4)(x-2)}dx=\int\frac{2}{(x^2+4)}dx+\int\frac{1}{(x-2)}dx=\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\log|x-2|+C$$

(4) $\int\frac{2x^2+4}{(x^2+1)^2}dx$

$$\frac{2x^2+4}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}=\frac{B}{(x^2+1)^2}+\frac{D}{(x^2+1)}$$

右辺を通分したとき分子にx^4が現れないようにするため，$C=0$

同じく，分子にx^3が現れないようにするため，$A=0$

$$\frac{2x^2+4}{(x^2+1)^2}=\frac{B}{(x^2+1)^2}+\frac{D}{(x^2+1)}=\frac{D+B(x^2+1)}{(x^2+1)^2}\ \Rightarrow\ B=2,\ D=2$$

$$\int\frac{2x^2+4}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{2}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{2}{(x^2+1)}dx\ \underbrace{=}_{\text{第2項は問題 4-2\{1\}(6)}}\ \left(\arctan x+\frac{x}{(x^2+1)}\right)+2\arctan x+C$$

4. $\sin x$と$\cos x$の有理関数を$f(\sin x,\cos x)$とおく，変数変換して$t=\tan\frac{x}{2}$とおくことにより，$\int f(\sin x,\cos\ x)dx$は有理関数の不定積分に帰着でき必ず積分できることをしめせ．

概観

・この問の核心は「$\sin x$ と $\cos x$ の有理関数が必ず積分できることを示せ」です．

・この課題を実行する手段として，$t=\tan\frac{x}{2}$という置換が指示されています．

・「有理関数の不定積分は必ず計算できる」ことを既知としています（教科書 p.85[例 2]の直下）．

用語：

・変数 x の有理関数とは x の多項式の比です(教科書 p.84，式 4.15).

・「$\sin x$の多項式」は，$a_n(\sin x)^n + a_{n-1}(\sin x)^{n-1} + \cdots + a_1 \sin x + a_0$という式のこと，「$\cos x$の多項式」につていも同様です(教科書の式 4.14 とは，係数の添え字の付け方が異なります).

・「$\sin x$と$\cos x$の多項式」は, $\sin x$のべき乗と$\cos x$のべき乗の積がいろいろな組み合わせで足しあわされた関数，式で書くと

$$f(\sin x, \cos x) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_{jk}\,(\sin x)^j(\cos x)^k$$

というものです．たとえば$3\sin^3 x\cos^2 x + \sin x\cos x + 2\sin x + \cos x + 5$ というような関数です.

・「$\sin x$と$\cos x$の有理関数」は，「$\sin x$と$\cos x$の多項式」と「$\sin x$と$\cos x$の多項式」の比です．たとえば $\frac{\sin x\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$.

・「帰着する」＝「帰り着く」，たどり着く，という意味です

詳細：

まず，$f(\sin x, \cos x)$に現れるサインとコサインを t で書き直す方法：

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ だから

$$\boxed{\sin x} = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} = \frac{2t}{t^2+1} = \boxed{\frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos x} = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} - 1 = \frac{2}{t^2+1} - 1 = \frac{1-t^2}{t^2+1} = \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$dt = \frac{d\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{dx}\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx = \frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}{2}dx = \frac{1+t^2}{2}dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}dt}$$

こうして，「$\sin x$と$\cos x$の有理関数」$f(\sin x, \cos x)$の積分

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx$$

に，$\sin x = \frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$を代入して$t$の関数とし, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$を用いると

$$\int f\left(\frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

となります．$f\left(\frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$は，「$\frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}$ と $\frac{1-t^2}{1+t^2}$の多項式」の比なので$(1+t^2)$の何乗かを分子と分母に掛けると，t の多項式の比となります. さらに$\frac{2}{1+t^2}$をかけても, やはり$f\left(\frac{2\mathrm{t}}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$は t の有理関数です. こうして, $f(\sin x, \cos x)$は必ず積分することができることを示せました.