4 章　演習問題　[2]　　次の定積分を求めよ.

(1) $\int_{-1}^{1}(x^2-x^3)\,dx$

偶関数＋奇関数の，原点について対称な積分区間の取り扱い：

$$\int_{-1}^{1}(x^2-x^3)\,dx = 2\int_{0}^{1}x^2\,dx = \frac{2}{3}[x^2]_0^1 = \frac{2}{3}(1^2-0) = \frac{2}{3}$$

(2) $\int_{-4}^{-8}\frac{dx}{x+3}$

被積分関数は$x=-3$で不連続だが，この点は積分区間外：

$$\int_{-4}^{-8}\frac{dx}{x+3} = [\log|x+3|]_{-4}^{-8} = \log|-8+3| - \log|-4+3| = \log|-5| - \log|-1| = \log 5 - \log 1 = \log 5$$

(3) $\int_{1}^{2}\log x\,dx$

$$\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = \int (x')\,(\log x)dx = x\log x - \int (x)\,(\log x)'dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\log x - x + C$$

$$\int_1^2 \log x\,dx = [x\log x - \ x]_1^2 = (2\log 2-2)-(1\log 1 - 1\ ) = (2\log 2 - 2) - (1\cdot 0 - 1) = 2\log 2 - 1$$

(4) $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ \ (a>0)$

演習[1](10)より

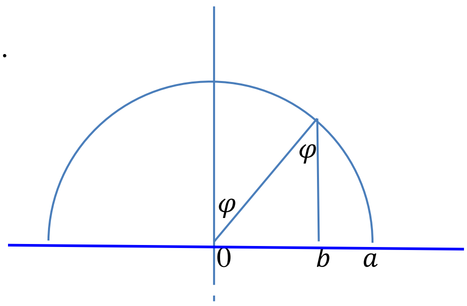
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C$$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\,arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a = (a\cdot 0 + a^2\arcsin 1) - (0\cdot a + a^2\arcsin 0)$$

$$= a^2\arcsin 1 - a^2\arcsin 0 = a^2\cdot\frac{\pi}{2} - a^2\cdot 0 = \frac{\pi a^2}{2}$$

別解

この定積分は半径aの半円の面積である．したがって$\frac{\pi a^2}{2}$を得る.



幾何学的に積分を求める類題　$\int_0^b\sqrt{a^2-x^2}\,dx, 0<b<a$

直角三角形の面積$=\frac{1}{2}b\times\sqrt{a^2-b^2}$

扇形の面積$=\frac{1}{2}a^2\varphi$,　$\sin\varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{b}{a}$

$\int_0^b\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,b\,\sqrt{a^2-b^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{b}{a}$

(5) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx$

置換：$s = 1-\sin x \ \Rightarrow ds = -\cos x\,dx$　　$\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\sin x}} = \int\frac{-ds}{\sqrt{s}} = -2\sqrt{s}+C(=-2\sqrt{1-\sin x}+C)$

$x: 0\to\frac{\pi}{2}$のとき $s: 1\to 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx = -2\left[\sqrt{s}\right]_1^0 = -2$$

もし，$-2\sqrt{1-\sin x}$の形を用いて不定積分を求めるのであれば，x を変数とするときの被積分関数が積分区間の上端で発散するので

$$\lim_{b\to\pi/2}\int_0^{\mathrm{b}}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx$$

が収束するという論理を貫く必要がある．もちろん，$-2\sqrt{1-\sin x}\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow}0$であり，積分は存在する．

(6) $\int_0^1\frac{dx}{x^a}\ (0<a<1)$

積分区間の下端で被積分関数が発散するため，広義積分として計算する．

$$\int\frac{dx}{x^a}=\int x^{-a}dx=\frac{1}{1-a}x^{1-a}+C,\qquad (0<a<1)\ \Rightarrow\ \int_0^1\frac{dx}{x^a}=\lim_{c\to0}\int_{\mathrm{c}}^1\frac{dx}{x^a}=\frac{1}{1-a}\left(1^{1-a}-\lim_{c\to0}c^{1-a}\right)$$

$0<a<1$より$1-a>0$，したがって$\lim_{c\to0}c^{1-a}=0$となり，広義積分が存在する：

$$\int_0^1\frac{dx}{x^a}=\frac{1}{1-a}$$

(7)$\int_0^3\frac{dx}{(3-x)^{\frac{3}{2}}}$

積分区間で$3-x\geq0$だから,下端を除いて$1/(3-x)^{\frac{3}{2}}$は有限の値となる．広義積分により計算する．

$$\int\frac{dx}{(3-x)^{\frac{3}{2}}}=\int(3-x)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{-1}{1-\frac{3}{2}}(3-x)^{1-\frac{3}{2}}+\mathrm{C}=2(3-x)^{-\frac{1}{2}}+\mathrm{C}=\frac{2}{\sqrt{3-x}}+C$$

上式は下端で発散するため，この定積分は有限の値にならない．積分は存在しない．

(8) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

置換：$t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx=tdx\quad,\qquad x:-\infty\to\infty\Rightarrow t:0\to\infty$

$$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{\frac{1}{t}dt}{t+t^{-1}}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\arctan t+C,$$
置換後も，積分区間に関して広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+1}=[\arctan t]_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

(9) $\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(1-x)^2}$

被積分関数は$x=1$で発散するため，広義積分

$$\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(1-x)^2}=\lim_{\substack{a\to\infty\\ \mathrm{b}\to1}}\int_a^b\frac{dx}{(1-x)^2}+\lim_{b\to1}\int_b^2\frac{dx}{(1-x)^2}$$

を計算する．不定積分は

$$\int\frac{dx}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}+C$$

となり，$x=1$で発散するため，積分は存在しない．

(10)$\int_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

被積分関数は発散しないが積分区間が∞となるため広義積分を行う．まず不定積分は

置換：$t=\sqrt{x},\qquad dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2t}dx\,,\qquad \int\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{e^{-t}}{t}2tdt=2\int e^{-t}dt=-2e^{-t}+C$

$$x:1\to\infty\Rightarrow t=1\to\infty,\quad \int_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=[-2e^{-t}]_1^{\infty}=(-2e^{-\infty})-(-2e^{-1})=(-2\cdot0)-\left(-2\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{2}{e}$$