第 6 章　例 1-3　問題 6-4　演習[5][8]　例題 6.8、6.9　Q&A

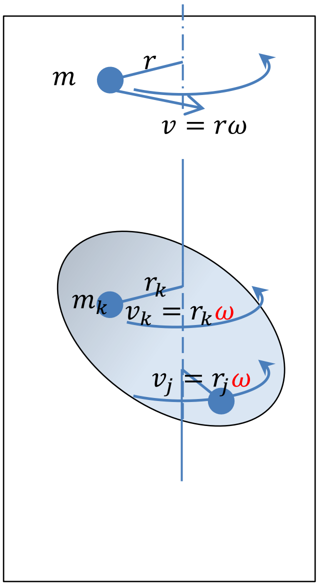
皆さんの質問を見ながら同情していました：この教科書では 2 次元極座標の動径（原点からの距離）を ρ （ロー）という文字で表し，3 次元極座標の動径は r で表しています． 3 次元の物体の密度を ρ と書いています．少し紛らわしいですね．

Q. 積分は体積を求めるものなのに，なぜ重心などを求める際に積分を用いているのですか・

A. 定積分は「微小なものを寄せ集める作業」です．ある形の体積を求めるときは，その形の内部を微小な体積に分けて，それを寄せ集めます．面積を求めるときは，微小な面積を寄せ集めます．何を寄せ集めるときでも積分を使えます．たとえば重心は，物体を微小な部分に分け，その部分の質量にその部分の座標を掛けたものを寄せ集めます．

Q.　慣性モーメントが何かわかりません．

A. たとえば，回転している円板を止めるにはエネルギーが必要です．それは円板を構成するどの質点も運動エネルギーを持っていて，その総和が円板全体の運動エネルギーとなっているからです．では，ある速さで回転している物体の運動エネルギーはどのように計算したらよいでしょうか．このときに重要になるのが慣性モーメントです．



質量mの物体の速さがvのとき，その運動エネルギーが$K = \frac{1}{2}mv^2$となることを既知とします．この物体の運動が半径rで角速度 ω の円運動のときは，速さが$v = r\omega$なので，$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$となります．回転運動なので，位置座標の代わりに角 θ を，速度の代わりに角速度 ω を用いて運動の様子を表すとすると，$I \equiv mr^2$が質量の変わりとなって$K = \frac{1}{2}I\omega^2$という式に至ります．まとめると，回転運動を角 θ を座標として使うとき，質量の役目を果たす量がIであり，これを慣性モーメントと呼びます．

形を変えない物体（剛体という）が回転するとき，物体に乗っている人が見る景色はどこに乗っていても同じ速さで回転します．言い換えると，剛体のどの位置も回転の角速度が同じです．剛体を細分してk番目の部分に注目すると，その位置によって回転軸からの距離r_kが異なります．この部分の慣性モーメントは k によって異なる値I_kですが，どれも同じ角速度 ω で回転するので，全体の運動エネルギーは

$$I = \sum_{k=1,N} I_k = \sum_{k=1,N} m_k r_k^2 \text{ として} K = \sum_{k=1,N} \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum_{k=1,N} \frac{1}{2} m_k (r_k\omega)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1,N} m_k r_k^2\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I\omega^2$$

となります．

k番目の部分の体積をdVとすると，質量m_kは体積と密度ρ の積なので $m_k \equiv dm = \rho dV$です．このとき和が積分に変化します．座標系を導入して，回転軸を z 軸とするようにします（他の直線を回転軸としてもかまいませんが，そうするとr_k^2の表現がややこしくなります）．そうすると，k 番目の部分が座標(x, y, z)のところにあるとき，$dm = \rho(x, y, z)dV = \rho(x, y, z)dxdydz$，またこの点の z 軸からの距離の 2 乗は$r_k^2 = x^2 + y^2$なので

$$I = \iiint r^2\, dm = \iiint r^2 \rho\, dV = \iiint (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z) dxdydz$$

となります．積分領域を書きませんでしたが，もちろんこの物体の形状が領域です．

Q. 慣性モーメントの求め方がよくわかりませんでした．

A. 手順は

① 回転軸がどこにあるかを見極めます

② 物体の微小な部分に注目し次の量を書きます

・その部分と回転軸との距離 r

・その部分に含まれる質量 dm

③ $\mathrm{r^2dm}$を，その物体の全領域にわたって寄せ集めます（積分）

例 1

Q. 積分範囲は$-\frac{l}{2}\sim\frac{l}{2}$からではなく$0\sim l$としてはいけないのですか？

棒の各部分の位置をどのような座標系で表すかは自由ですが，いったん座標系を選んだら，その座標系によって位置を表現しないとなりません（異なる座標で表現するには，座標変換します）．この例題では棒の中央を座標原点にとったので，棒の両端の座標は$-\frac{l}{2}$と$\frac{l}{2}$です．もしこれを0 とlにしたければ，座標原点を棒の左端にとります．

位置に関する情報を得たい場合，それを座標で表現する以上，座標の取り方で異なる値となることに注意しましょう．たとえば，全質量は，座標軸の設定によらない量ですから，座標をどのようにとろうと同じ値になりますが，物体の重心は「特定の位置」なので，座標の取り方でその値が異なります．慣性モーメントは，回転軸の位置と物体の質量分布の関係で決まるので，座標軸の取り方にはよらない値になります．

座標原点を棒の中心に置いた（したがって棒の両端の座標が$-\frac{l}{2}$と$\frac{l}{2}$）のは，棒の中心に回転軸を通したときの慣性モーメントを求めたいと思ったからです．そうすれば，原点からの距離の二乗すなわち単にx^2を掛けて積分すればよいわけです．

もし棒の中心を原点としたのに，たとえば棒の右端に回転軸を通すと，回転軸からの距離の二乗$\left(x-\frac{l}{2}\right)^2$を掛けて積分することになります．それぐらいなら回転軸の位置に原点をもってくれば計算が楽でしょう．

例 2

Q. ρは何を表していますか．ρが表す物はいつでも同じですか．

A. この問の中でρは原点からの距離（極座標の動径）を表しています．

ρという文字は，他にどんな量を表す習慣があるかという質問ですね．密度には使われることが多いです：単位体積あたり，あるいは単位面積あたりの質量．似たような場合として，単位体積あたりの電荷．電気抵抗についての比抵抗，ほかにもあるかもしれません．参考：

http://www.jsme.or.jp/publish/yoko/t5.pdf

Q. $\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\sigma\rho d\rho d\varphi$の$\sigma\rho$という関数は何ですか？積分範囲はどうやって決まったのですか．

A. 問題文に，σは面密度と書いてあります．面密度は，単位面積あたりの質量です．

ρは，これまでもしばしば出た２次元の極座標の動径です．「極座標を用いた積分」の解説を見ましょう．P.146 まで戻るとその説明が始まる箇所が見つかります．そこから丁寧に読んでみてください．（そこから読んでわからないときは，何がわからないかを考えて，その答えを求めて前にさかのぼります．）

極座標を用いて表された領域の範囲：ρすなわち原点からの距離が 0→a，始線（x 軸）からの角が 0→２π，ということで原点を中心とする半径 a の円の内部全域を表しています．

Q. サインとコサインが突然でてきて，何を意味しているかわかりませんでした.

A. 重心の x 座標を求めるとき, 直交座標系では x を掛けて積分します. 極座標と xy 座標の関係は$\mathrm{x}=\rho\cos\phi, \mathrm{y}=\rho\sin\phi$ですから，x を掛けるかわりに$\rho\cos\phi$をかけて積分します.

例 3

Q. 例 2 の ρ と，この問の ρ とどういう関係があるのですか.

A. まるで無関係です. 問題文にあるとおり，ここの ρ は密度です. 一方，rが原点からの距離です. この教科書の著者は，３次元で原点からの距離を r と書き，２次元で原点からの距離を ρ と書く習慣のようですね. しかし，多くの場合に，２次元でも原点からの距離を r と書きます.

Q. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$の$\rho r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$はどのようにして出てきたのですか？

A. ρ は物体の密度で位置によらず一定の値とし，積分の外に出しますから，$r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$だけに注目します. これは（「3 次元の」とは書いていなくても，図を見れば 3 次元の）極座標を使って，と書いてあるので，その解説がある p.149 のあたりまでさかのぼって教科書を丁寧に読んでください. 参考：

$$r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi = (\underbrace{r\sin\theta}_{\substack{xy\text{平面に}\\ \text{射影した}\\ \text{動径の長さ}}} \quad \underbrace{d\varphi}_{\substack{\text{xy 面上}\\ \text{での角度の}\\ \text{変化}}})(\underbrace{r\,d\theta}_{\substack{\theta\text{ が変化したとき}\\ \text{子午線にそって}\\ \text{変化する長さ}}})(\underbrace{dr}_{\substack{\text{動径の}\\ \text{長さの変化}}})$$

Q. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$の θ の積分が 0〜π というのが分かりませんでした.

A. 点が正の z 軸上にあると θ は 0, 負の z 軸上にあると θ は π となるように設定されています.「真上から真下まで全部」というのがθ： 0→π です.

Q. 重心の座標が X=Y=0 となるのは，球の中心を原点としているから，計算しなくてもいいのではありませんか.

A. 実際問題としては，そのとおりです. ここは計算の練習だから・・・
球の形をしていても中身の質量の分布が偏っていたら，重心の位置は原点にはなりません. そんなときに使える計算方法を開発しておきましょう.

問題 6-4　1　(3)

Q. 円柱座標が分からないので，与えられたコマの図形と積分区間の関係が分かりません.

A. 点の位置が直交座標系で表した(x, y, z)のとき，円柱座標で(ρ, ϕ, z)なら，これらの変数の関係は

$$x=\rho\cos\phi, y=\rho\sin\phi, z=z \ \rightarrow\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}\ (\geq 0), \qquad \tan\phi=\frac{y}{x}, \quad z=z$$

という変換の式に従います. 言い直すと，円柱座標は，点の位置を xy 平面上に射影して２次元の極座標を使う以外は３次元直交座標系と同じです. そうすると，z 軸を回転軸とする半径aの無限に長い円柱の表面が「$\rho=a\cdots$他の変数は任意」という簡単な式で表されます（だから，円柱座標系といいます).

問題の条件の等号の部分は, 点の直交座標(x, y, z)について$x^2+y^2=z^2$という式です. これは, たとえば$x=0$(すなわちyz平面)とすると，$\mathrm{y}^2=\mathrm{z}^2 \rightarrow z=\pm y$すなわち，原点を通り傾きがそれぞれ±１の直線の式です. 同じように y=0 のときも, 原点を通り傾きが±１の２直線の式になります. 円柱座標で表すと$x^2+y^2=z^2$は$\rho^2=z^2$すなわち$\mathrm{z}=\rho(\geq 0)$とな

ります：φによらず（しがたって xy 面内のどの向きについても）z 軸からρだけ離れると高さがρだけ増える，と書いてあります．すなわち，z 軸を含む任意の平面とコマの表面の交線は傾き 1 の直線となります．言い換えると，原点を通る傾き 1 の直線を z 軸の周りに回転してできた面を表すのが$x^2+y^2=z^2$あるいは$\mathrm{z}=\rho$です．

次に不等式は$x^2+y^2\le z^2$あるいは$\mathrm{z}\ge\rho$ですが，この不等式を満たす点は「表面の点よりも z が大きい」と読めるので，図の逆さまの円錐の内部が指定されたことになります．最後に z の範囲が$0\le\mathrm{z}\le\mathrm{h}$と指定されて，高さ h の円錐の内部が決定しました．

問題 6-4　2

Q. 原点を中心として半径 a の円を$4\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dydx$として解いてはいけないのですか？

A. どのように解いてもかまいません．いろいろな手法が使えるようになったら，できるだけ計算が簡単になる方法を選択しましょう．

Q.「Y を求めたら X と同じになった」とだけ書いてもいいですか.

A. かまいません．

さらに，計算しなくても，同じになる理由が述べてあればそれでＯＫ．

Q.　σ ρの積分は何を意味していますか.

A. まずσ（シグマ）は，単位面積あたりの質量（面密度）を表します．ρは原点からの距離を表します．ρdρdφが微小な面積を表します．ρは極座標のヤコビの行列式．

問題 6-5　2

Q. 巻末解答の $\mathbf{W}=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}(Pdx+Qdy+Rdz)=\int_{r_1}^{r_2}GmM\,d\left(\frac{1}{r}\right)$が分かりませんでした.

A.　巻末解答の１行目の式：$Pdx+Qdy+Rdz=\ GmM\,d\left(\frac{1}{r}\right)$が分からない，ということですね．

わかりにくいのは$d\left(\frac{1}{r}\right)$でしょうか．これは$\left(\frac{1}{r}\right)$の全微分（教科書 p.119）のこと．

rについては，問題文に　$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$　と書いてあり，原点からの距離です．教科書の偏微分法を復習すると p.118 [例 1]に$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$などあり，r の全微分は

$$dr=\frac{\partial r}{\partial x}dx+\frac{\partial r}{\partial y}dy+\frac{\partial r}{\partial z}dx=\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy+\frac{z}{r}dz$$

です．一般にrだけの関数$f(r)$の微分$df=\frac{df}{dr}dr$の右辺に上式を代入すると

$$df=\frac{df}{dr}dr=\frac{x}{r}\frac{df}{dr}dx+\frac{y}{r}\frac{df}{dr}dy+\frac{z}{r}\frac{df}{dr}dz$$

$f(r)=\frac{1}{r}$の場合，$\frac{df}{dr}=-\frac{1}{r^2}$だから

$$d\left(\frac{1}{r}\right)=\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr=\left(-\frac{x}{r^3}\right)dx+\left(-\frac{y}{r^3}\right)dy+\left(-\frac{z}{r^3}\right)dz$$

です．したがって

$Pdx+Qdy+Rdz=-\frac{GmMx}{r^3}dx-\frac{GmMy}{r^3}dy-\frac{GmMz}{r^3}dz=-GmM\left\{\left(\frac{x}{r^3}\right)dx+\left(\frac{y}{r^3}\right)dy+\left(\frac{z}{r^3}\right)dz\right\}=GmM\,d\left(\frac{1}{r}\right)$

となります．

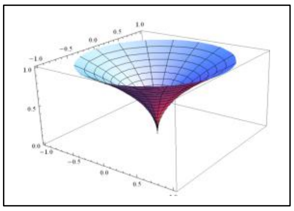
１－３

演習[5]

Q. $\boldsymbol{M = \iiint_{\mathrm{R}} dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{\frac{h\rho}{a}}^{h}\rho\, dz\, d\rho\, d\varphi}$**の z についての積分範囲がよくわかりません.**

A. この累次積分の最初の積分は，xy 平面上の位置(ρ,φ)を動かさずに，z で積分します． z の積分領域は円錐面の位置から始まり上端が h．円錐面の位置（z 座標）は円錐の母線の傾斜が$\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}$なので，$\frac{h\rho}{a}$です.

Q. もし円錐の表面が曲がっていたら，積分領域はどのようになるでしょうか.



A. たとえば，右のような図形でしょうか．もとの円錐の場合，母線を表す式が$\mathrm{z}(\rho) = \frac{h}{a}\rho$です. これを発展させると，1 次式でない関数$f(\rho)$用いて，ρz 平面の曲線$\mathrm{z}(\rho) = \frac{h}{a}f(\rho)$が「曲がった母線？!」の式となります．そうすると，

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{f(\rho)}^{h}\rho\, dzd\rho d\varphi$$

Q. X=0, Y=0 とは重心が無いという意味ですか.

A. X や Y は重心の座標です．重心が原点(0,0)に一致したと言っています．原点が(0,0)だから「原点が無い」とは思いませんよね？重心は物体に固有の位置ですから，消えたりしません.

演習[7](4)

Q. 例題 6.9 にならってやってみましたが，答えがあいません.

A. $\int_{\mathrm{c}}(y^2dx - x^2dy)$, $\mathrm{C}: (0,0)\underbrace{\to}_{C_1}(1,0)\underbrace{\to}_{C_2}(1,1)$．まず，$\frac{\partial y^2}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial(-x^2)}{\partial x} = -2x$なので，始点終点が同じでも径路のとりかたにより値が異なる可能性がありますから，言われたとおりの積分路で積分を行います：.

C_1: y=0 のまま変化しないから dy=0, $\int_{\mathrm{c}_1}(\underbrace{y^2}_{0}dx - x^2\underbrace{dy}_{0}) = 0$

C_2: x=1 のまま変化しないから dx=0, $\int_{\mathrm{c}_2}(y^2\underbrace{dx}_{0} - \underbrace{x^2}_{1}dy) = -\int_{y=0}^{1}dy = -1$

したがって，$\int_{\mathrm{c}}(y^2dx - x^2dy) = -1$

演習[8]

Q. 積分の範囲がわかりません.

A. 積分の範囲にかかわらず成り立つ議論なので，物体の表面の形（積分領域）は与えていません.
教科書の図のような形状の物体だと積分領域を一つの関数で表すことはできず，いくつかの大きな塊に分断して別々に積分してから加えることになります：物体を分断しても，同じ回転軸について慣性モーメントを計算するのであれば，積分（というより和）の性質から全く問題ありません.

Q. $\boldsymbol{I_0}$**と**$\boldsymbol{I_{\mathrm{cm}}}$**が関係する式を立てる方法がわかりません.**

I_0は，勝手に決めた軸のまわりの回転に関する慣性モーメント．I_{cm}は物体の重心のまわりの回転に関する慣性モーメント．

勝手に決めた回転軸を z 軸に選ぶと，

$$I_0 = \iiint_R (x^2+y^2)\underbrace{f(x,y,z)\mathrm{dV}}_{dm}$$

です．重心の座標を(X,Y,Z)とし，重心を通る z 軸と平行な回転軸のまわりの回転に関する慣性モーメントは，(x^2+y^2)のかわりに，この新しい軸から質量dmまでの距離の二乗$(x-X)^2+(y-Y)^2$が式中に現れて

$$I_{\mathrm{cm}} = \iiint_R ((x-X)^2+(y-Y)^2)\underbrace{f(x,y,z)\mathrm{dV}}_{dm} = \iiint_R ((x^2-2xX+X^2)+(y^2-2yY+Y^2))f(x,y,z)dV$$

$$= \iiint_R (x^2+y^2)f(x,y,z)dV - \iiint_R (2xX+2yY)f(x,y,z)dV + \iiint_R (X^2+Y^2)f(x,y,z)dV$$

となります．重心の座標(X,Y,Z)は定数だから

$$I_{\mathrm{cm}} = I_0 - 2X\iiint_R xf(x,y,z)dV - 2\mathrm{Y}\iiint_R yf(x,y,z)dV + (X^2+Y^2)\iiint_R f(x,y,z)dV$$

重心の定義が$\mathrm{X} = \frac{1}{\mathrm{M}}\iiint_R xf(x,y,z)dV$，$\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{M}}\iiint_R yf(x,y,z)dV$，$M = \iiint_R f(x,y,z)dV$なので，

$$I_{\mathrm{cm}} = I_0 - 2X^2M - 2Y^2M + (X^2+Y^2)M = I_0 - (X^2+Y^2)M$$

となります．移項して整理すると

$$I_0 = I_{\mathrm{cm}} + (X^2+Y^2)M$$

です．

右辺第 2 項$(X^2+Y^2)M$は，重心に質点 M がありこれが z 軸のまわりを回転するときの慣性モーメントです．こうして，I_0は，重心のまわりの回転の慣性モーメントI_{cm}と，重心に全質量 M が集中したときの z 軸まわりの慣性モーメントの合計になります．物体がその形を変えることなく（剛体）z 軸を回転軸として回転するときは，重心のまわりに同じ角速度で回転していることに基づく関係です．

Q. $\boldsymbol{\iiint_R x' f(x,y,z)dxdydz = 0}$**は「重心の定義から」となっていますが，理解できませんでした．**

A. 直前の説明と同じ内容になります：教科書の略解では，重心から見た位置を

$$x' = x - X,\ \ y' = y - Y$$

として

$$\iiint_R x' f(x,y,z)dxdydz = \iiint_R (x-X)\,f(x,y,z)dxdydz = \iiint_R x\,f(x,y,z)dxdydz - \iiint_R X\,f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint_R x\,f(x,y,z)dxdydz - \mathrm{X}\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_R x\,f(x,y,z)dxdydz - XM = 0$$

の途中計算を見せていません．重心の定義：$\mathrm{X} = \frac{1}{\mathrm{M}}\iiint_R xf(x,y,z)dV$を最後の等号に使っています．

Q. 巻末の解に「一般性を失うことなしに」とありましたが，どういう意味ですか．

A. この問題に即して説明しましょう：点 O を通る決められた直線のまわりの慣性モーメントを求めるのがテーマです．点 O をどこに設定するか，直線の方向をどちら向きにするかについては，何もかかれていません．物体の形や質量分布についても何も指定がないので，取り扱うのは「一般的な場合」（特別な場合ではない）です．

このときに「原点を通る z 軸」のまわりの慣性モーメントを求めるという特別な状況（本当は，x 軸でも y 軸でもよいはずだし，さらには原点を通らない直線のまわりでも成り立つ議論をしないといけません）を設定してよいのだろうか，反省をします．しかし，物体の形（密度の分布を表す関数 f や領域 R）を具体的な関数形で与えているわけではな

いから，「z 軸を先に決めてから，物体を配置してもよいだろう（関数形を決める)」と考え直します．こうして，「原点を通る z 軸」のまわりの慣性モーメントを計算しても，一般的な場合に通用する結果を得るはずです．

この議論をまとめて「一般性を失うことなしに原点を通る z 軸のまわりの慣性モーメントを考えればよい」と表しました．「一般性を失うことなく・・・とする」というのはよく使われる語句ですが「・・・という一見特殊な状況を設定するのだが，そうして得られる結果はどんな場合にも適用できるものだ」という意味です．

例題 6-8&9

Q. 教科書の説明を読んでだいたい理解しましたが，具体的な説明をしてください．

A. 具体的な説明をせよと言われても，質問が具体的でないと，答えられないのですが・・・

教科書の解説を「読んだ」あとは，「解」の<u>計算を自分の手で逐一実行し</u>，そのどこが理解できないのかを分析する作業です．

例題 6-8 (ii)

Q. 教科書には「$\boldsymbol{C_2}$は$\boldsymbol{y=x-1(1\le x\le 2)}$である」とありますがなぜですか？

A.　線積分$\int_{C_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$を計算するとき，$x$と$y$積分計算に現れる$x$と$y$は(C2 という直線上を移動するのだから) $y=x-1$という関係にあり，x の値が決まると y の値も決まってしまいます．ですから，被積分関数をxだけで書き表すと$P(x,x-1)$および$Q(x,x-1)$となります．また x と y の変化は 1:1 に比例しているので$dy=dx$．そして C2 が線分であり，その範囲を x で言うと$1\le x\le 2$となります．

こうして C2:$y=x-1(1\le x\le 2)$のとき

$$\int_{C_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x=1\to 2} P(x,x-1)dx+Q(x,x-1)dx$$

$P(x,y)=x-y$, $Q(x,y)=y$なので，求める線積分は

$$\int_1^2 (x-(x-1))\,dx+(x-1)dx=\int_1^2 x\,dx=\frac{1}{2}[x^2]_1^2=\frac{3}{2}$$

となります．

例題 6-9 (1)

Q. 解の積分範囲が x:0→1 となっていますが，これは(0,0,0)→(1,1,1)のとき x:0→1 となるからですか．

A. はい．

講義で示したように，パラメータを導入したほうがわかりやすいように思います：

$x(t)=t,\quad y(t)=t,\quad z(t)=t$　とおいて $t: 0\to 1$とすると，直線 OC に沿った点の移動を表現できます．したがって

$$\int_{問(1)} [(x+yz)dx+(y+xz)dy+(z+xy)dz]=\int_{t=0}^1 (t+t^2)\frac{dx}{dt}dt+(t+t^2)\frac{dy}{dt}dt+(t+t^2)\frac{dy}{dt}dt=\int_0^1 3(t+t^2)dt=\frac{5}{2}$$

例題 6-9 (2)

Q.　B→C の移動で$\boldsymbol{x = y = 1}$とおくのはどうしてですか.

A. B(1,1,0)→C(1,1,0)なので，この移動において$x = y = 1$に保たれます．$\int_{\mathrm{BC}} P(x, y, \mathrm{z})dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$の積分を実行するときに，$P(1,1,\mathrm{z})$，$Q(1,1,z)$，$R(1,1,z)$を用います．むろん，さらに，dx=0, dy=0 ですから

$$\int_{\mathrm{BC}} P(1,1,\mathrm{z})dx + Q(1,1,z)dy + R(1,1,z)dz = \int_{\mathrm{z:0\to1}} R(1,1,z)dz$$