問題 6.2　演習 6-[1][2]　例題 6.7　Q&A

問題 6-2,　1 (4)

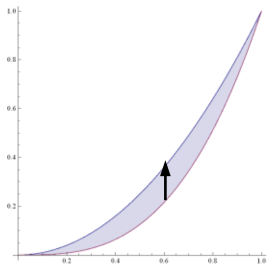
Q. 積分領域を図にできませんでした.

A. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dydx$: 内側の積分では x を止めて y で積分. その積分区間の下が x によらず常に 0, 上が$\sqrt{a^2-x^2}$（原点を中心とし，半径 a の円）. こうして，積分領域の外周が x 軸とこの円であることが分かります. 外側の積分で x を 0 から a まで動かすので，積分領域は「原点を中心とし，半径 a の円」の第一象限の部分となります.

問題 6-2,　1(5)

Q.「R は$y=x^2$と $y=x^3$で囲まれた領域」とありますが，積分範囲の求め方がわかりません.

A. $y=x^2$と $y=x^3$のグラフを描きます. そうすると領域の状況が見えてきます.

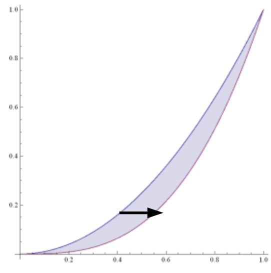


- 最初に，x を止めて y について被積分関数 f(x,y)の積分をしましょう：
  - ・$0 \le x \le 1$の中のどこか 1 つの x の値を通過し y 軸に平行な直線を描く
  - ・この直線が領域の境界（下が$y=x^3$，上が$y=x^2$）と交わる点の y 座標（x^3とx^2）に注目

  つぎに，この直線にそってyで積分する. $A(x) = \int_{y=x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy$

  - ・$A(x)$を x について領域の端から端まで(x=0→1)積分する. $\int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \int_{y=x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

- 最初に y をとめて x について積分するなら
  - ・$0 \le y \le 1$の中のどこか 1 つの y の値を通過し x 軸に平行な直線を描く
  - ・この直線が領域の境界（左が$x=\sqrt{y}$，右が$x=y^{\frac{1}{3}}$）と交わる点の x 座標（$y^{1/2}$と$y^{\frac{1}{3}}$）に注目

  つぎに，この直線にそって x で積分する. $B(y) = \int_{x=x^{1/2}}^{x^{1/3}} f(x,y)\,dx$

  - ・$B(y)$を y について領域の端から端まで(y=0→1)積分する. $\int_0^1 B(y)\,dy = \int_0^1 \int_{x=x^{1/2}}^{x^{1/3}} f(x,y)\,dx\,dy$

問題 6-2　2.

Q. さきに y を積分するときは$\int_{\sqrt{y}}^1 dy$でなく$\int_0^{\sqrt{y}} dy$ではだめなのですか？

A. そのようにすると，1×1 の正方形から R を差し引いた部分が積分領域となります.

問題 6-2　3

Q.　I_1, I_2が同じ値にならないのはなぜですか？

A. それを考えるのが題意です！

被積分関数が領域の端である原点で発散し,しかも x 軸上を原点に近づく場合と，y 軸上を原点に近づく場合で，被積分関数の符号が逆になっていることが，原因です.

「積分領域で被積分関数が発散するとき，領域について極限をとって収束すれば，これを広義積分とする」という約束にしたがって計算してみましょう.

● まず，積分区間を$\epsilon_x \le x \le 1$，$\epsilon_y \le y \le 1$として，２重積分を実行します

$$\int_{\epsilon_y}^{1} \frac{x-y}{(x+y)^3} dy = \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{\epsilon_y}^{1} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{\epsilon_y}{\left(x+\epsilon_y\right)^2}$$

$$\int_{\epsilon_x}^{1}\int_{\epsilon_y}^{1} \frac{x-y}{(x+y)^3} dy\ dx = \int_{\epsilon_x}^{1}\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{\epsilon_y}{\left(x+\epsilon_y\right)^2}\right) dx = \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{\epsilon_y}{x+\epsilon_y}\right]_{\epsilon_x}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\epsilon_y}{1+\epsilon_y}\right) - \left(-\frac{1}{\epsilon_x+1} + \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x+\epsilon_y}\right) = \frac{(-1+\epsilon_x)(\epsilon_x-\epsilon_y)(-1+\epsilon_y)}{2(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(\epsilon_x+\epsilon_y)}$$

● この段階で観察してみましょう．もし$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon$すなわち積分領域を x 軸方向と y 軸方向で対称にすれば分子が 0 となり$\int_{\epsilon}^{1}\int_{\epsilon}^{1} \frac{x-y}{(x+y)^3} dy\ dx = 0$です．この条件を保ったまま$\epsilon \to 0$の極限をとるときは

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\int_{\epsilon}^{1} \frac{x-y}{(x+y)^3} dy\ dx = 0$$

となります．また，もし，たとえば$\epsilon_x = \epsilon_y/a = \epsilon\ (a>1)$と，積分領域を非対称にとって比 a を一定にたもったまま極限$\epsilon \to 0$をとると

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\int_{2\epsilon}^{1} \frac{x-y}{(x+y)^3} dy\ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$$

となります.

● つぎに，題意の累次積分を実行しましょう．x を固定しておいて y だけ先に積分するときは $\lim_{\epsilon_y\to 0}$を先にとって，その後で$\lim_{\epsilon_x\to 0}$とすることに相当するので

$$\lim_{\epsilon_y\to 0}\frac{(-1+\epsilon_x)(\epsilon_x-\epsilon_y)(-1+\epsilon_y)}{2(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(\epsilon_x+\epsilon_y)} = \frac{1-\epsilon_x}{2+2\epsilon_x},\quad \int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy\ dx = \lim_{\epsilon_x\to 0}\frac{1-\epsilon_x}{2+2\epsilon_x} = \frac{1}{2}$$

となります．一方，y を固定しておいて x だけ先に積分するときは $\lim_{\epsilon_x\to 0}$を先にとって，その後で$\lim_{\epsilon_y\to 0}$とするので

$$\lim_{\epsilon_x\to 0}\frac{(-1+\epsilon_x)(\epsilon_x-\epsilon_y)(-1+\epsilon_y)}{2(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(\epsilon_x+\epsilon_y)} = \frac{-1+\epsilon_y}{2(1+\epsilon_y)},\quad \int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx\ dy = \lim_{\epsilon_y\to 0}\frac{-1+\epsilon_y}{2(1+\epsilon_y)} = -\frac{1}{2}$$

となります.

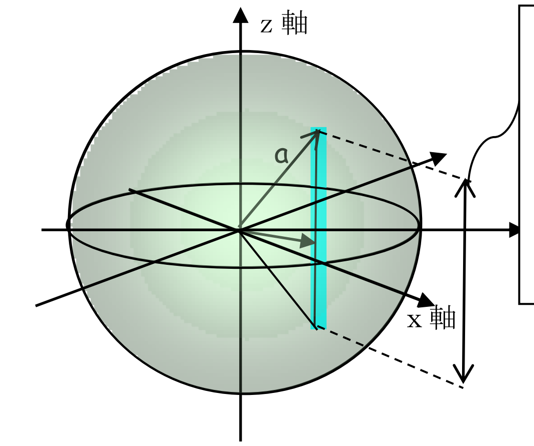
● 極限をとる操作（とくにそれを繰り返すとき）は, 相手の性質が穏やかでないとき, 侮れないのです.

問題 6-2,　4(3)

Q. 累次積分になおしたときの積分区間がわかりません.

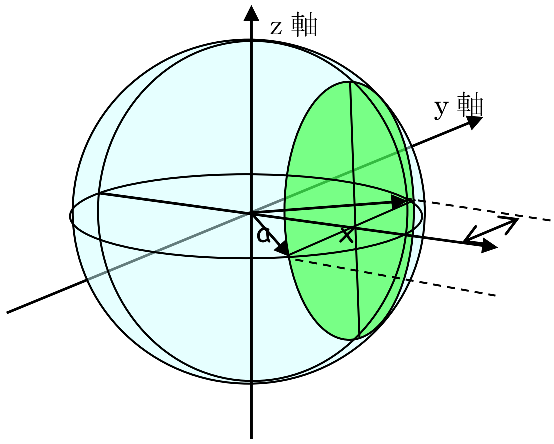
A. 授業用 WebPage の該当する「問題の詳解」に次のように書いてあります.

略解の内容を図解すると次のようになる：



x と y を一定とし z で積分するとき（その点を通過する z 軸方向の線分が領域に入る条件は） z が $\pm\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$ の範囲となる。この棒の体積は

$2\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}dxdy$



上の棒を、x の値を一定にして、y 方向に動かすと、領域に入る部分は円板となる。y が動く範囲は$\pm\sqrt{a^2-x^2}$。この範囲を動くとき，棒の長さは上で決めた長さとなるから，自動的に伸縮している。この円板の体積は

$$\left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}dy\right)dx$$

最後に，この円板を x 軸方向に動かして球とする。

第 6 章演習課題

[1](3)

Q.　φについて積分するとき，どのような変形をしたのですか？

A. 授業用の WebPage の詳解は次のように書きました：

$$\int_0^{\pi}\int_0^{a\cos\phi}\sin\phi\,\rho\,d\rho\,d\phi=\int_0^{\pi}\sin\phi\int_0^{a\cos\phi}\rho\,d\rho\,d\phi=\int_0^{\pi}\sin\phi\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^{a\cos\phi}d\phi$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\sin\phi\cos^2\phi\,d\phi=-\frac{a^2}{2}\int_1^{-1}\cos^2\phi\,d\left(\cos\phi\right)=-\frac{a^2}{2}\int_1^{-1}x^2dx=\frac{a^2}{3}$$

最後から 2 つめの式で，いわば「$t=\cos\phi, dt=d(\cos\phi)=-\sin\phi\ d\phi$-」と置き換えています.

[1] (4)

Q. 領域 $R: 0 \leq x, y \leq m$を 「$0 \leq x < \infty, \ -\infty < y \leq m$」と思って積分したのですが答えが合いません．

A. そうでしょう．「$0 \leq x \leq m$ かつ $0 \leq y \leq m$」というつもりなのです．書き方が不親切ですが．．．こういうふうに書くこともあります．

Q. $\frac{1}{ab}(e^{am}-1)(e^{bm}-1)$となり，答えとあいません．

A. あってます！．巻末解答の「/ab」は「/(ab)」のつもりです．もちろん「/」は「÷」です．

[2] (2)

Q.領域 R が与えられていないとき，どうやって積分の順序を変えたらよいのでしょう．積分の順序を変えたとき，積分範囲も変わるのですか？

A. 累次積分の区間から領域 R の様子を読み解くことができます．

この問題の積分は$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3)\,dydx$です．外側の積分は$x = 0 \to 1$ ですから，内側の積分はxを 0 と 1 の間の好きなところに固定しておいて，y を動かします．y軸と平行な直線が積分領域を横切るとき，その範囲は下がx，上が$\sqrt{x}$ですから，この多重積分の領域は下側が直線$\mathrm{y}=\mathrm{x}$，上側が曲線$y=\sqrt{x}$，これらで囲まれた領域ということになります．

先に x で積分する場合，外側の積分が y について 0→1 なので，この範囲にある y を適当に選んで固定し，x 軸と平行な線が積分領域を横切る範囲を見ると，左端が$x=y^2$，右端が$x=y$となります．よって$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (y+y^3)\,dxdy$を得ます．

例題 6.7

Q. $\iint f(x,y)dxdy = \iint f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho d\rho d\phi$のどこにヤコビ行列式 J が使われているのですか？

A. $\mathrm{J} = \left\| \begin{matrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{matrix} \right\| = \rho$,

$$\iint f(x,y)dxdy = \iint f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) \left\| \begin{matrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{matrix} \right\| d\rho d\phi = \iint f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho d\rho d\phi$$

Q. 直交座標系から極座標系を用いているのはなぜですか？

A. 積分の計算が格段に楽になることがあると思われるとき用います．原点からの距離だけに依存して変化する被積分関数や，極座標で表すと簡単な式になるような被積分関数，あるいはそうした積分領域の境界があるときがしばしば見受けられるのです．