1　曲線の長さ

$\boxed{\text{重要な公式}}$

$[a,b]$ で定義された関数 $y=f(x)$ が表すグラフの曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{1}$$

である.

$\boxed{\text{説明}}$

グラフ上の点 (x,y) における微小な線分の長さを ds とする．ds を斜辺とし，他の 2 辺を dx, dy とする直角三角形に三平方の定理（ピタゴラスの定理）を適用すると

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2 \tag{2}$$

が成り立つ．これより

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{3}$$

を得る．曲線の長さ s は ds の総和だから

$$s=\int_0^s ds=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{4}$$

となる.

2　曲線の長さの計算例

2.1　単位円の円周の長さ

$\boxed{\text{1 価関数に分解する}}$

陰関数 $x^2+y^2=1$ を 2 個の 1 価関数で表すと

$$y_+=\sqrt{1-x^2}\,,\quad y_-=-\sqrt{1-x^2} \tag{5}$$

である．このとき

$$\frac{y_\pm}{dx}=\frac{\mp x}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad \sqrt{1+\left(\frac{dy_\pm}{dx}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6}$$

が成り立つ.

$\boxed{\text{計算}}$

$$\begin{aligned} s &= \int_{-1}^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy_+}{dx}\right)^2}\,dx+\int_{-1}^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy_-}{dx}\right)^2}\,dx && (7)\\ &= 2\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=4\Big[\arcsin x\Big]_0^1 && (8)\\ &= 4\left(\arcsin(1)-\arcsin(0)\right)=4\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=2\pi && (9)\end{aligned}$$

となる.

2.2　区間 $[0,1]$ における曲線 $y=x^2$ の長さ

$dy/dx=2x$ より s は

$$s=\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx \tag{10}$$

と表される.

置換積分

$$x=\frac{1}{2}\sinh t\Big[=\frac{1}{2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)\Big] \tag{11}$$

とおくと, 被積分関数は

$$\sqrt{1+4x^2}=\sqrt{1+\sinh^2 t} \tag{12}$$

となり、積分区間は $x:0\to 1$ より $\sinh t:0\to 2$ であるから

$$t:0\to \mathrm{arcsinh}(2) \tag{13}$$

となる. arcsinh は sinh の逆関数で, arcsin^{-1} とも書く. この変数変換による尺度の変化は

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\,\frac{1}{2}\sinh t}{dt}=\frac{1}{2}\cosh t\Big[=\frac{1}{2}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\Big] \tag{14}$$

である. 以上より

$$s=\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{arcsinh}(2)} \cosh t\sqrt{1+\sinh^2 t}\,dt \tag{15}$$

となる.

双曲線関数の性質

$$\cosh^2 t-\sinh^2 t=1 \tag{16}$$

を用いると

$$s=\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{arcsinh}(2)} \cosh^2 t\,dt \tag{17}$$

となる. さらに

$$\cosh^2 t=\frac{1}{2}(\cosh 2t+1) \tag{18}$$

を用いる. また

$$\frac{d\sinh t}{dt}=\cosh t \tag{19}$$

より

$$\int \cosh t\,dt=\sinh t+C \tag{20}$$

となっている.

積分

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1}{4}\int_0^{\mathrm{arcsinh}(2)} (\cosh 2t+1)\,dt && (21)\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sinh 2t+t\right]_0^{\mathrm{arcsinh}(2)} && (22)\\
&= \frac{1}{8}\left(\sinh(2\mathrm{arcsinh}(2))-\sinh(2\mathrm{arcsinh}(0))\right)+\frac{1}{4}\left(\mathrm{arcsinh}(2)-\mathrm{arcsinh}(0)\right) && (23)\\
&= \frac{1}{8}\sinh(2\mathrm{arcsinh}(2))+\frac{1}{4}\mathrm{arcsinh}(2) && (24)
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\operatorname{arcsinh} t = \log\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) \tag{25}$$

に注意して数値を代入すると

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1}{8}\frac{e^{2\log(2+\sqrt{2^2+1})} - e^{-2\log(2+\sqrt{2^2+1})}}{2} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{2^2+1}) && (26)\\
&= \frac{1}{16}\left(\left(2+\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)^2\right) + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) && (27)\\
&= \frac{1}{16}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^2\right) + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) && (28)\\
&= \frac{1}{16}\frac{(\sqrt{5}+2)^2 - (\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}-2)^2(\sqrt{5}+2)^2} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) && (29)\\
&= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) && (30)
\end{aligned}$$

を得る．