電磁波

１．マクスウェル方程式

電荷と電流の分布が与えられたとき，そこに生じる電場と磁場が従う方程式がマクスウェル方程式である：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ は，電場に関するガウスの法則

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$$

を適用する体積Vを無限小にしたときの式であり，電気力線の生成と消滅は電荷の位置だけで起きることを記す.

電磁誘導により生じる電場は必ずループになり発散が 0 となることに注意せよ．$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$の右辺を点電荷の電荷分布に設定したときの解は，点電荷による電場（クーロンの法則）と一致する.

- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$は，磁束密度に関数するガウスの法則であり，単独の磁荷が存在せず磁力線はループになることを示す.

- $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$の積分形は

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

であり，コイルの誘導起電力とコイルを貫く磁束の時間的変化の割合が等しいこと（逆符号）を示す．電流が時間的に変化する（したがって，電荷が加速度運動する）ときに生じる電場の空間的な変化（渦，ずれ）と磁場の時間的変化が等しいこと（逆符号）を示す.

- $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$　の積分形は

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

すなわち，アンペール・マクスウェルの法則である.

２．真空中のマクスウェル方程式と電磁波解

アンペール・マクスウェルの法則の右辺第２項　$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$　が，電磁波の存在を予言するものであることを示す.

電磁波は真空（何もない空間：電磁気的には電荷も電流もない空間）を伝わっていく．真空中におけるマクスウェル方程式では，$\rho = 0$，$\vec{j} = 0$となる：

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

電場と磁場について対称性がよいことに気付く．電磁誘導の法則の両辺の　$\nabla \times$　をとると，（すでに「ベクトル

解析」で学んだ計算によって）

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}=-\nabla\times\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B})=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

すなわち

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0}$$

となる．電場ベクトルの成分が$\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$のとき上式は

$$\boxed{\nabla^2E_x-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}=0,\quad \nabla^2E_y-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2E_y}{\partial t^2}=0,\quad \nabla^2E_z-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2E_z}{\partial t^2}=0}$$

の３式を表している．∇^2を偏微分の記号で書くと，たとえば第１式は

$$\frac{\partial^2E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}=0$$

である．

$\nabla\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ の両辺の$\nabla\times$　をとると，同様の計算により

$$\nabla^2\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$$

となることを各自確認せよ．

【１次元的な電場に対する式】もし，電場がxy平面内のどこでも同じ値となり z 方向にだけ異なるときは

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}(z,t)$$

となるので，

$$\nabla^2E_x=\frac{\partial^2E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2},\quad \nabla^2E_y=\frac{\partial^2E_y}{\partial z^2},\quad \nabla^2E_z=\frac{\partial^2E_z}{\partial z^2}$$

となり，$\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$は

$$\boxed{\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}=0,\quad \frac{\partial^2E_y}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2E_y}{\partial t^2}=0、\quad \frac{\partial^2E_z}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2E_z}{\partial t^2}=0}$$

となる．磁束密度についても同様の式を得ることを各自確認せよ．

【波動方程式】z軸方向に速さvで波が伝わるとき，波の量（たとえば電場のx成分E_x）をfと書くと

$$\frac{\partial^2f}{\partial z^2}-\frac{1}{v}^2\frac{\partial^2f}{\partial t^2}=0\quad あるいは\quad \frac{\partial^2f}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2f}{\partial z^2}=0$$

がfについての波動方程式である．３次元空間内で様々な方向に波が伝わることを表せる式は

$$\nabla^2f-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathrm{f}}{\partial t^2}=0\qquad あるいは\qquad \frac{\partial^2f}{\partial t^2}-v^2\nabla^2f=0$$

である．

【例】電場が$\vec{E}=(E_x,0,0)$で

$$E_x=E_0\mathrm{e}^{i(ky-\omega t)}=E_0\,e^{ik(y-ct)}$$

のとき，すなわち y 軸方向に速さ c で伝わる（波数 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, 角振動数$\omega=kc$）波のとき，これが」波動方程式の

解となることを確認するのは容易である：

$$E_x = E_0 \mathrm{e}^{i(ky-\omega t)} \ \ \rightarrow \ \ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}=-k^2 E_0 \mathrm{e}^{i(ky-\omega t)}, \ \ \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=-\varepsilon_0\mu_0\omega^2 E_0 \mathrm{e}^{i(ky-\omega t)}$$

よって$k^2=\varepsilon_0\mu_0\omega^2$のとき解となる．いいかえると，この波が伝わる速さは$\mathrm{c}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$である．

この波は，y が一定のとき（xz 平面と平行な面内で）同じ位相となる．y が一定の平面は等位相面であり**平面波**である．

【光速】

$$\varepsilon_0 \simeq 8.85418782 \times 10^{-12}\ \mathrm{m^{-3}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2}, \ \ \mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\mathrm{H/m} \simeq 1.25663706 \times 10^{-6}\ \mathrm{m\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}}$$

$$\varepsilon_0\mu_0 \simeq 1.2\times 10^{-17}, \ \ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \simeq 3\times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

【波動方程式の意味】

波とは（その伝播速度が一定値のとき，分散が無いとき）波形が保たれたまま移動する現象である．波が速さvでx軸正方向に進むとしよう．波とともに移動する観測者にとって，波形を表す関数の形は変わらない．いいかえると，この関数は$s=(x-vt)$を変数としている：

$$f(x,t)=f\big((x-vt)\big)=g(s), \quad s=s(x.t)=x-vt$$

このことから，fの時間による微分と位置座標による微分に次の関係が成り立つ：

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial t}\frac{dg}{ds}=v\frac{dg}{ds}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial s}{\partial x}\frac{dg}{ds}=\frac{dg}{ds}$$

$$\Rightarrow \ \ \frac{\partial f}{\partial t}=v\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}-v\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

空間がどの方向にも等価なら，波がx軸正方向に進むとき負方向にも同じ速さで伝わるだろう．そこで

$$f(x,t)=f\big((x+vt)\big)=g(s'), \ \ \mathrm{s}'=s'^{(x,t)}=x+vt \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

「波が伝わる」とき，その方向によって異なる方程式を用いるのは不本意である．ひとつの式で両方向の波の伝播を表すには，$v^2=(-v)^2$が現れるよう，もう一回微分を行う．

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dg}{ds}\right)=v^2\frac{d^2 g}{ds^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial s}{\partial x}\frac{d}{ds}\frac{dg}{ds}=\frac{d^2 g}{ds^2} \quad \Rightarrow \ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$$

こうして波動方程式が得られる．

真空中の電場と磁束密度の各方向成分は，すべて同じ速さで伝わる波である．

マクスウェルによる項$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$は，アンペールの法則を電荷保存則に適合するよう，実験によらず導入されたのだが，この項があると電磁場は真空中を$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$の速さで伝わる波となることが予測される．逆に，実験的に「電磁波」を発生・観測し，その伝播速度など諸性質が予測どおりであれば，マクスウェルの理論が証明されたことになる．この実験を行ったのがヘルツであった．電磁波の速さ

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \simeq 3\times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

が，天体観測で得られていた可視光の速さと一致することから，可視光が電磁波であることを知った．

【真空中を伝わる横波】

波の量が空間的な方向をもつ振動のとき，波を横波と縦波に分類する．横波とは，振動の方向と波の進行方向が直交する波である（例：弦を伝わる波）．これに対して，縦波は振動の方向と進行方向が平行である（例：音波）．真空中の電荷が存在しない位置では，ガウスの法則から

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{E}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

となる．電場がx軸方向に進む平面波のとき，$\frac{\partial}{\partial y}$と$\frac{\partial}{\partial z}$が 0 となり，

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{E}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \therefore\ E_x(x, y, z) = \text{一定}$$

となる．波の進行方向の振動成分E_xが変動しないので，横波である．平面波でないときも，小さな範囲でみればほとんど平面波とみなせるので「真空中の電磁波の電場は横波である」という一般的な結論を得たことになる．

磁束密度についても

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{B}} = 0$$

から，横波であることが分かる．

３．電磁波における電場と磁場の関係

真空中でx軸方向に進む平面波の電磁波を考察する．横波だからE_x, B_x が 0 となる．波数k，角振動数ωとする：

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} \cos(kx - \omega t)$$

電場と磁束密度の位相が同じになるかはこの段階でまだ分からないので位相差ϕを導入する：

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{0y} \\ B_{0z} \end{pmatrix} \cos(kx - \omega t + \phi)$$

電磁誘導の法則 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$に，上の E と B の成分表示を代入し，それらの関係を見る：

$$\text{左辺} = \nabla \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ kE_{0z}\sin(kx - \omega t) \\ -kE_{0y}\sin(kx - \omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ kE_{0z} \\ -kE_{0y} \end{pmatrix} \sin(kx - \omega t)$$

ここで「波数ベクトル」$\vec{k} = (k, 0, 0)$を定義する（波数ベクトルは，平面波の進行方向を向き，大きさが波数となるベクトルである）．波数ベクトルと電場の外積を計算すると

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ k & 0 & 0 \\ 0 & E_{0y} & E_{0z} \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -kE_{0z} \\ kE_{0y} \end{pmatrix}$$

となり，最終項の振幅が現れる：

$$\nabla \times \vec{E} = -\vec{k} \times \vec{E}_0\ \sin(kx - \omega t)$$

$$\therefore\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{k} \times \vec{E}_0\ \sin(kx - \omega t) = \omega \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t + \phi)}$$

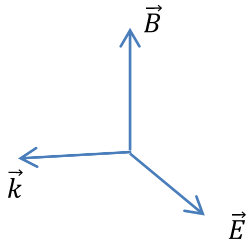
$t = 0, x = 0$のとき上式の両辺を比較すると

$$\vec{k}\times\vec{E}_0\times 0 = 0 = kc\vec{B}_0\sin\phi \quad\rightarrow\quad \boxed{\phi = 0}$$

しがたって，真空中を伝わる電磁波の E と B の位相は等しい．

さらに

$$\boxed{\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0} \rightarrow \boxed{\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0},$$



E と B は直交し，波の進行方向とも直交（横波）．より正確には，ある時刻にある場所で E と B のベクトルをスケッチすると，進行方向$\vec{k}$から$\vec{E}$のほうに回転する右ねじの進行方向が$\vec{B}$の方向になる．したがてまた，

$\vec{k}$の方向（波が進む方向）と　$\vec{E}\times\vec{B}$の方向が一致

真空中を伝わる電磁波の E と B の大きさについては

$$kE_0 = \omega B_0 \rightarrow \boxed{E_0 = cB_0}$$

の関係が成り立つ．

【計算例】電磁波の E の振幅が 1 V/m のとき，B の振幅は　$\mathrm{B}_0 = \frac{1}{c}E_0 = 3\times 10^{-9}$ T

４．電磁波のエネルギー

コンデンサーに蓄えられる電気的なエネルギーを，電極間の空間の電場のエネルギーと読み替えることで，電場のエネルギー密度が

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

となることを知っている．また，ソレノイドコイルに蓄える磁気的エネルギーを，ソレノイド内部の空間の磁場のエネルギーと読み替えることで，磁場のエネルギー密度が

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

となることを知っている．

電磁波のように時間的な変動する電磁場に対しても，これらのエネルギー密度の式が成り立つことが別途知られている．X 軸方向に進む平面電磁波

$$E_y = E_0\cos(kx-\omega t),\quad B_z = B_0\cos(kx-\omega t),\quad E_0 = cB_0,\ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

がもつエネルギー密度uを計算する．

まず

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(kx-\omega t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B_0^2\cos^2(kx-\omega t) = \frac{1}{2\mu_0}B_0^2\cos^2(kx-\omega t) = u_B$$

したがって真空を伝わる電磁波では$u_E = u_B$となる．

つぎに

$$u = u_E + u_B = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2(kx-\omega t) = \frac{1}{\mu_0}B_0^2\cos^2(kx-\omega t)$$

である．

エネルギー密度は時間的に単振動している．１周期Tにわたる平均値（時間平均）は

$$< \cos^2(kx-\omega t) > = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kx-\omega t)\ dt = \frac{1}{2}\quad (x\text{によらず}\frac{1}{2})$$

より

$$< u > = \frac{1}{T}\int_0^T u\, dt = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

【電磁波のパワー密度】

このエネルギー密度をもつ電磁波が速さ c で伝わるので，電磁波のエネルギーも c で伝わる．電磁波の進む方向と直交する単位面積を，単位時間に通過する電磁波のエネルギーの時間平均は

$$< S > = c < u >$$

となる．Sは電磁波のパワー密度を表す．S を別の量で表すと

$$< S > = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0\ cB_0 = \frac{1}{2}c^2\varepsilon_0 E_0 B_0 = \frac{1}{2\mu_0}E_0 B_0 = < E\frac{B}{\mu_0} > = < EH >$$

電磁波の進行方向を向くポインティング(の)ベクトル$\vec{S}$を定義する：

$$\boxed{\vec{\mathrm{S}} = \vec{E}\times\frac{1}{\mu_0}\vec{B} = \vec{E}\times\vec{H}}$$

【計算例】

$E_0 = 1\ \mathrm{V/m}$ の平面電磁波のポインティングベクトルの大きさ：　$\epsilon_0 = 9\times 10^{-12}\mathrm{F/m},\ \mathrm{c} = 3\times 10^8\ \mathrm{m/s}$

$$< \mathrm{S} > = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}(3\times 10^8)(9\times 10^{-12})1^2\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 1.4\times 10^{-3}\ \mathrm{W/m^2} = 1\ \mathrm{mW/m^2}$$

$$< \mathrm{S} > = 1\frac{\mathrm{mW}}{\mathrm{cm}^2} \to \mathrm{E}_0 = 1\ \mathrm{V/cm}$$

５．電磁波の発生（ベクトルポテンシャルで理解した方がわかりやすいのだが）

5-1.　基本方程式：マクスウェル方程式と電荷保存則

$$\nabla\cdot\vec{\mathrm{E}} = \tfrac{1}{\epsilon_0}\rho,\ \ \nabla\cdot\vec{B} = 0,\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\tfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ ,\ \ \nabla\times\vec{E} = -\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\qquad \nabla\cdot j + \tfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

5-2.　磁場の波動

$$\nabla\times\nabla\times\vec{B} = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B} = \mu_0\nabla\times\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{E}\right) = \mu_0\nabla\times\vec{j} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\quad\to\boxed{\nabla^2\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\nabla\times\vec{j}}$$

$\nabla\times\vec{j}$:　電流密度の「横方向の空間変化」があると，電流密度と直交するように磁場が出来る．電流密度が時間的に変動すると磁場の波ができる

5-3. 電場の波動

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{B} = -\mu_0\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{j} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\to\quad\boxed{\nabla^2\vec{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0}\nabla\rho - \mu_0\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{j}}\ (*)$$

5.3.1 電場を縦成分($\nabla\times$により 0)と横成分（$\nabla\cdot$により 0）にわける：　$\vec{\mathrm{E}} = \nabla f + \nabla\times\vec{F}$

$$\nabla^2\vec{E} = \nabla^2(\nabla f) + \nabla^2\left(\nabla\times\vec{F}\right) = \nabla(\nabla^2 f) + \nabla\times(\nabla^2\vec{F})$$

∇^2と他の微分演算子が交換できる：

$\nabla^2\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x},\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y},\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial\nabla^2 \mathrm{f}}{\partial x},\frac{\partial\nabla^2 \mathrm{f}}{\partial y},\frac{\partial\nabla^2 \mathrm{f}}{\partial z}\right)=\nabla(\nabla^2\mathrm{f})$　　∇^2を作用させても　たて(L)のまま

$\nabla^2(\nabla\times\vec{F})=\nabla^2\left(\frac{\partial \mathrm{F_z}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{F_y}}{\partial z},*,*\right)=\left(\frac{\partial\nabla^2 \mathrm{F_z}}{\partial y}-\frac{\partial\nabla^2 \mathrm{F_y}}{\partial z},*,*\right)=(\nabla\times\nabla^2\vec{F})$　∇^2を作用させても　よこ(T)のまま

基本式(*)を縦横成分に分解する：

$$\left\{\nabla(\nabla^2 f)+\nabla\times\left(\nabla^2\vec{F}\right)\right\}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\nabla f+\nabla\times\vec{F}\right\}=\nabla\left(\nabla^2 f-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)+\nabla\times\left(\nabla^2\vec{F}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}\right)=$$

$$\frac{1}{\epsilon_0}\nabla\rho-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}$$

しがたって

$$\nabla\left(\nabla^2 f-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)=\left(\nabla^2\nabla f-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\nabla f}{\partial t^2}\right)=\boxed{\left(\nabla^2\mathrm{E_L}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathrm{E_L}}{\partial t^2}\right)=\frac{1}{\epsilon_0}\nabla\rho-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}_L}$$

$$\nabla\times\left(\nabla^2\vec{F}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2}\right)=\left(\nabla^2\nabla\times\vec{F}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\nabla\times\vec{F}}{\partial t^2}\right)=\boxed{\left(\nabla^2\mathrm{E_T}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathrm{E_T}}{\partial t^2}\right)=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}_T}$$

5.3.2 電場の縦成分（渦なし＝クーロン場）は電荷と電流の縦成分の時間変動から
電場の横成分（発散なし＝誘導電場）は電流の横成分の時間変動から

5.4. 単振動する電磁場

波動方程式の空間部分：ヘルムホルツ方程式（電信方程式）

$$F(\vec{r},t)=f(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\nabla^2 f+k^2 f=g_0\delta^{(3)}(\vec{r})$$

球対称解：$\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{x}{r}f'$，　$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}f'\right)=\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+x\frac{x}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right)=\frac{1}{r}f'+\frac{x^2}{r}\left(\frac{1}{r}f''-\frac{1}{r^2}f'\right)$,

$\nabla^2 f=\frac{3}{r}f'+\frac{r^2}{r}\left(\frac{1}{r}f''-\frac{1}{r^2}f'\right)=\frac{2}{r}f'+f''\rightarrow\quad\nabla^2 f+k^2 f=f''+\frac{2}{r}f'+k^2 f=g_0\delta^{(3)}\ \rightarrow \mathrm{r}f''+2f'+k^2 rf=g_0 r\delta^{(3)}$

$$rf=h\rightarrow h'=f+rf'\rightarrow h''=2f'+rf'',\qquad\rightarrow\qquad h''+k^2h=g_0r\delta^{(3)}=g_0 4\pi r^3\,\delta(r)$$

$$r\neq 0\ \rightarrow\quad h(r)=e^{ikr}\rightarrow\quad f=\frac{e^{ikr}}{r},\qquad F=\frac{e^{ikr-\omega t}}{r}$$