EM2　No05.　 微分方程式による回路（あるいはシステム）の記述

交流回路では電流・電圧ともに単一周波数の（コ）サイン関数で振動するとした．このとき，コンデンサーに対して$\frac{1}{i\omega}$，コイルに対して$i\omega L$を，あたかもオームの法則の$R$のように（電流と電圧の比例関係の係数として）取り扱い，キルヒホッフの法則による連立方程式をたてれば，回路の解析を行えることを学んだ．

しかし, たとえば, ある瞬間にスイッチが入り回路に電流が流れ出すときは単一周波数のサイン波形ではない. もちろん情報処理のパルス列もサイン波形ではない．波形が単一周波数のサイン波でないことは頻繁に生じるので，このような一般的な波形をとりあつかう回路の特性を表現する方法を学ぶ必要がある．

ここでは電気回路を念頭におくが，建築物や乗り物さらにはロボットなどの構造体，楽器やホールのような音響システム，脳神経系を含む生体システムや環境システムなどの解析・設計・シミュレーションでも，本節で学ぶ方法が有効である．

また，ここでは，回路内の素子（素子のあつまり）に加わる電圧と流れる電流の関係に注目するが，ある 2 節点間の電圧と他の 2 節点間の電圧の関係に注目してもよい．構造物のある部分に加わる力と注目する部分の変形の関係でもよい，などなど．システムのパラメータ（ある部分を流れる電流，加わる電圧，力，変形などなど）のうち外部から制御するものを入力, その結果として生じるものを出力という. 何を入力とし何を出力とするかは, 同じシステムでも解析の目的によって異なることがある．

系の応答は，入力と出力の関係を表す関数（あるいは演算）として表現される．たとえば，ある周波数ωでコイル$C$に電流$\tilde{I}(\omega)$を流したとき両端に生じる電圧は$\tilde{V}(\omega)=\frac{1}{i\omega C}\tilde{I}(\omega)$となるが, このコイルをひとつの系とし, $\tilde{I}(\omega)$を入力，$\tilde{V}(\omega)$を出力とすると$\frac{1}{i\omega C}$（を乗じる演算）が応答を表す：コイル$C$の「周波数応答が$\frac{1}{i\omega C}$である」という．複雑な系であっても，$\tilde{I}(\omega)$を入力，$\tilde{V}(\omega)$を出力とすると，その複素インピーダンスが周波数応答となる．

「$\tilde{I}$になんらかの演算操作(Operation)をすると$\tilde{V}$になる」ことを

$$\tilde{V}=O[\tilde{I}]$$

などと表す．単一周波数におけるコンデンサーの例では$O[\tilde{I}]=\frac{1}{i\omega C}\tilde{I}$である．電圧を入力とし電流を出力とするとき$\tilde{I}=O[\tilde{V}]$と書くと

$$O[\tilde{V}]=i\omega C\,\tilde{V}$$

である．単一周波数ではない一般の波形のときは，コンデンサーの特性を$I=C\frac{dV}{dt}$のように記述できるので

$$I(t)=O[V(t)]=C\frac{d}{dt}V(t)\quad\rightarrow\quad O=C\frac{d}{dt}$$

と表すこともできる．すなわち電圧を入力，電流を出力とするとき，コンデンサーの応答は時間による微分演算子で表せる．電流を入力，電圧を出力とするときは$V(t)-V(0)=\frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt$であるから，$V(0)=0$のとき，応答は

$$O=\frac{1}{C}\int_0^{\mathrm{t}}dt\times$$

という時間による積分演算で表せる．

（インピーダンスを乗ずるような）積，微分演算や積分演算に共通する重要な特性は，その【線型性】：

$$O[\alpha I_1(\mathrm{t})+\beta I_2(\mathrm{t})]=\alpha O[I_1]+\beta O[I_2]$$

および【時不変性】である．時不変性とは，時間原点をどこに選んでも応答が変わらないことを指す．

線型でない応答は非線形な素子（トランジスタのような能動素子やダイオードのように非直線的な電流電圧特性をもつもの）によって得られる．たとえば，もし出力電圧が入力電流の 2 乗に比例する場合

$$V(t) = k\,I(t)^2 \rightarrow \quad V(t) = k(\alpha I_1 + \beta I_2)^2 = \alpha^2 k I_1^2 + \beta^2 k I_2^2 + 2\alpha\beta k I_1 I_2 \neq \alpha V_1 + \beta V_2 \cdots (V_j = k I_1^2)$$

である．このような系では，入力波形が周波数ωのとき出力に２ωの成分が現れたり直流成分が現れたりする．

時不変性をもたない系とは，使っている途中で回路素子の性能特性が変化したり，回路の構造が（ハンダがとれたりして！）変わったりする場合である．

以下では線型・時不変系を取り扱う．このとき応答を表す演算が線型（Linear）であることを表すために（O ではなく）$L$を演算子の記号にすることが多い．コイルのインダクタンスの記号と混同しないように．

本節の目標は，コンデンサー，コイル，抵抗からなる簡単な回路の電流と電圧の関係を定める微分方程式を書けるようにすることである．単一周波数の電流と電圧の関係，あるいは時間的に変化しない状態（定常状態）の電流と電圧の関係がその微分方程式を満たすことを確認する．

補遺：線型系の応答では，与えられた波形を様々な周波数のサイン波の重ね合わせととらえ，それぞれの周波数成分についての応答（周波数応答）を考え，与えられた波形における応答は「各周波数の応答の重ね合わせ」として表すことができる．フーリエ級数やフーリエ変換の知識が必要だが，系の周波数応答さえ調べておけばどのような波形に対しても対応可能である．ただし，与えられた初期条件を満たす「各周波数の応答の重ね合わせ」を求める作業（逆フーリエ変換）は必ずしも機械的に行うことは容易ではない．むしろ次節で学ぶラプラス変換で微分方程式の解を求める手法に慣れるのがよいだろう．