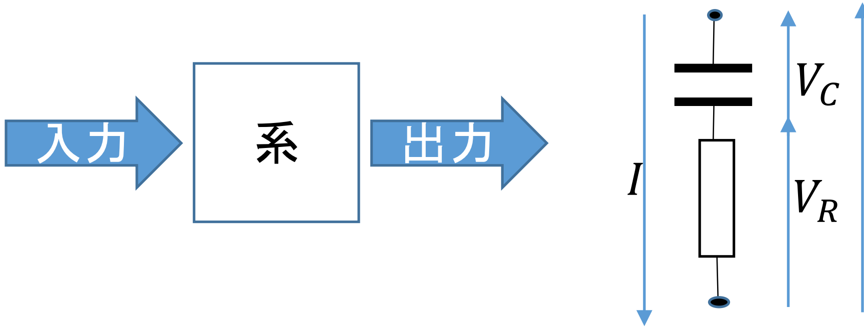
微分方程式による
回路の記述

入力と出力 (回路の応答)



$$V = V_C + V_R$$

入力	出力
I	V
I	V_C
V	I
V	V_R

- 電気系の入力 vs 出力の例
  - 素子を流れる電流 vs 別の(同じ)素子に加わる電圧
  - 電流 vs 電流
  - 電圧 vs 電圧
- 機械系の入力 vs 出力の例
  - ある部分に加える力vs 別の(同じ)部分の変形・変位
  - 力 vs 力
  - 変位vs 変位
- 生体系の入力 vs 出力の例
  - 環境から加わる刺激 vs 行動(回避, 学習, etc)

時不変線形系

- 時不変：　同じ入力に対し，いつも同じ応答をする
  - 時間原点のとりかたは任意，時間原点によらない
    - 入力 $x(t) \rightarrow$ 出力$y(t)$のとき, 任意のTに対して
      $x(t+T) = y(t+T)$
- 線形系：
  - ２つの入力の和に対する出力は，それぞれの入力に対する出力の和に等しい
  - 入力が c倍になると，出力も c倍になる
    - 例：電流が2倍なら，電圧が2倍
    - $x_1(t) \rightarrow y_1(t), x_2(t) \rightarrow y_2(t)$のとき
      $Ax_1(t) + Bx_2(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$

周波数応答と衝撃応答

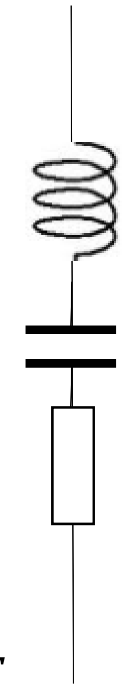
- 周波数応答:
  - 入出力ともに同じ周波数
    - 入力の振幅を一定に保ち周波数を変える
    - 周波数ごとの応答の振幅と位相を求める
  - 任意波形
    - フーリエ級数・フーリエ変換による重ね合わせ

- 衝撃応答
  - 入力が非常に短いパルスのときの出力波形
  - 周波数応答のフーリエ変換
    - 非常に短いパルスは様々な周波数の波形の重ね合わせ

例：回路の周波数応答

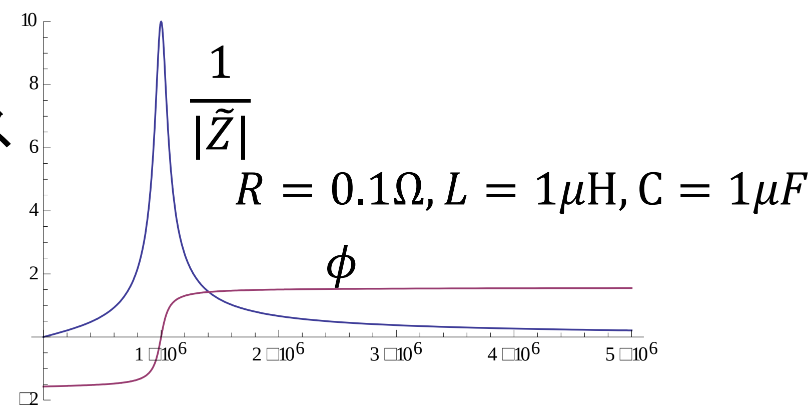
- インピーダンス$\tilde{Z}$は系の周波応答を表す
- $\tilde{Z} = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\, e^{i\phi(\omega)}$

$$\phi(\omega) = \arctan\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$



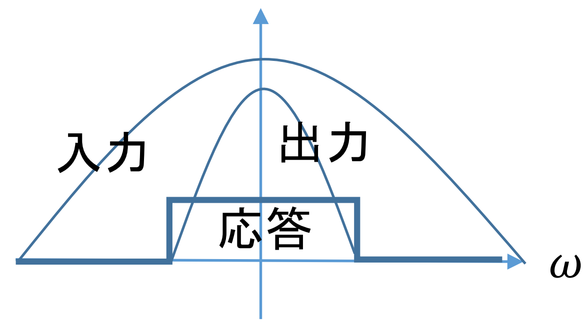
$\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$：共鳴(共振)周波数,

純抵抗Rと同じ, 最小インピーダンス

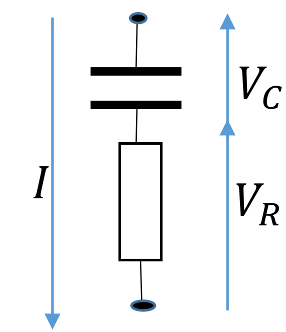


応答の数学的な記述

- $\tilde{V} = \tilde{Z}\,\tilde{I}$
  - 入力波形(時間変化)の周波数分解
  - 周波数軸上で，出力は入力と応答の積
  - 出力波形を再構築(フーリエ逆変換)



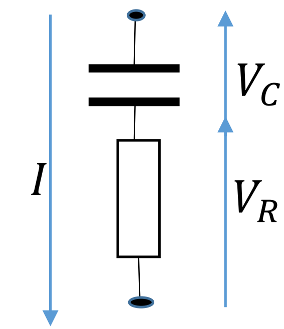
- 応答特性を表す微分方程式を解く
  - 例：RC直列回路に加える入力電圧Vと流れる出力電流Iの関係を表す微分方程式
    - $Q = CV_C,\ \ I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C}{dt},\ V_R = RI$
    - $V = V_R + V_C,\ \boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{dV_R}{dt} + \frac{dV_C}{dt} = R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I}$
  - $\frac{dV}{dt}$の具体的な形を与えたとき，この微分方程式を満たすI はどのようなものか?



ある関数から別の関数を導く演算子

- 例　$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt}$

  $\rightarrow \ \ a\frac{df}{dt} + bf(t) = g(t)$



$$O[f] = \left(a\frac{d}{dt} + b\right)f = g$$

線形演算子:

$$O[A_1 f_1 + A_2 f_2] = A_1 \cdot O[f_1] + A_2 \cdot O[f_2]$$

時不変演算子:

変数tを陽に含まない

応答を表す微分方程式とインピーダンス

- 例　$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt}$

$$\tilde{V} = \widetilde{V_0}e^{i\omega t},\ \frac{d\tilde{V}}{dt} = i\omega\widetilde{V_0}e^{i\omega t},\quad \tilde{I} = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}, \frac{d\tilde{I}}{dt} = i\omega\tilde{I}_0 e^{i\omega t}$$

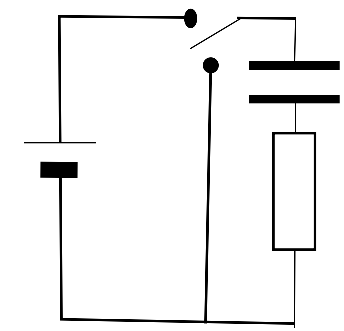
$$R \times i\omega\tilde{I}_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{C}\tilde{I}_0 e^{i\omega t} = i\omega\widetilde{V_0}e^{i\omega t}$$

$$\left(R \times i\omega + \frac{1}{C}\right)\tilde{I}_0 = i\omega\widetilde{V_0}$$

$$\tilde{I}_0 = \frac{i\omega}{\left(R \times i\omega + \frac{1}{C}\right)}\widetilde{V_0},\qquad \tilde{Z} = \frac{R \times i\omega + \frac{1}{C}}{i\omega} = R + \frac{1}{i\omega C}$$

アドミッタンス　　　　インピーダンス

微分方程式を満たす解



- 例
  - 充電完了後 $V=V_0,\ \frac{dV}{dt}=0,\ I(0)=I(t)=0$

$$\boxed{R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dV}{dt}=0\,,\quad I(0)=0\rightarrow I(t)=0}$$

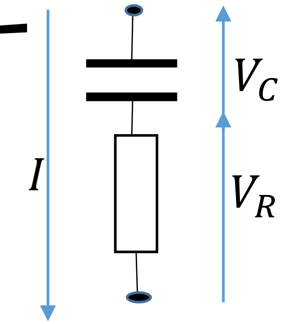
  - 放電中 $V=0,\ \frac{dV}{dt}=0,\ I(0)=I_0=V_0/R,\ I(t)\neq 0$

$$\boxed{R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dV}{dt}=0\,,\quad I(0)=I_0\rightarrow I(t)=I_0e^{-\frac{t}{RC}}}$$

  - 放電完了（充電前）$V=0,\ \frac{dV}{dt}=0,\ I(0)=I(t)=0$
  - 充電中 $V=V_0,\ \frac{dV}{dt}=0$

$$\boxed{R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dV}{dt}=0\,,\qquad I(0)=-I_0=-V_0/R\rightarrow I(t)=-I_0e^{-\frac{t}{RC}}}$$

応答を積分方程式を用いて表す



- 例：　コンデンサーの電荷の時間的な変化

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt} \Rightarrow RI(t) + \frac{1}{C}\underbrace{\int I(t)\,dt}_{Q} = V(t)$$

微分方程式　　　　積分方程式

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t)$$

積分方程式より微分方程式のほうが扱いやすい

電荷についての微分方程式

入力を電圧，出力を電荷とするとき

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=V(t)$$

「充電，$V(t)=V_0$」の初期条件 $Q(0)=0$

「放電，$V(t)=0$」の初期条件 $Q(0)=Q_0=CV_0$

LCR直列共振回路の応答を表す2階線形微分方程式

- LCR直列共振回路:

$$V = V_R + V_L + V_C = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I\,dt$$

$$\frac{dV}{dt} = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I$$

高次の微分係数から書く:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt}$$

LCR系の応答を表す演算子:

$$O[\quad] = L\frac{d^2}{dt^2} + R\frac{d}{dt} + \frac{1}{C}\times,$$

$$O[I] = g(t),\ g(t) = \frac{dV}{dt}$$