EM2　04．回路のインピーダンス

抵抗やコンデンサー・コイルなどを交流素子として用いるときの特性は，抵抗値やリアクタンスで表した．それらは，素子に流れる交流電流と加わる電圧の比例関係を表す量である．この考えを拡張し，2 個の端子の間に複数の素子を回路網により組み合わせて接続したとき，そこに流れる交流電流と電圧の関係を表す量をインピーダンスという．端子間に単一の素子が接続されているなら，インピーダンスは抵抗やリアクタンスに一致する．インピーダンスは電圧を電流で割った量なので，単位はΩ（オーム）である．

【回路網の最小ユニット】

回路網は，電流がそれ以上分岐することのない最小ユニットとなる枝から構成される．それらの枝には素子が直列に接続されている．最小ユニットの枝を並列に接続し，さらにそれを直列や並列に接続することで回路網が成立する．

2 つの端子間（回路網全体）のインピーダンスを計算する基本は，素子を直列接続しただけの枝のインピーダンス，インピーダンスが既知の枝を直列接続したときのインピーダンスおよび並列接続したときのインピーダンスの計算である．

【素子の直列接続による合成インピーダンス】

直列に接続された素子には同じ電流が流れる．どの素子にも同じ時刻に，振幅と位相が同じ電流が流れている（準定常）．枝の両端の電圧は，各素子の電圧の和である（準定常）．

たとえば，直列に接続した抵抗RとコンデンサーCとコイルLに流れる電流が$I(t) = I_0 \cos \omega t$のとき，この枝の両端に加わる電圧は

$$V_R(t) = RI(\mathrm{t}),\ V_C(t) = \frac{1}{C}Q(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt,\quad V_L(t) = L\frac{dI}{dt}$$

の和

$$V(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t) = RI_0 \cos \omega t + \left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L\right) I_0 \sin \omega t$$

となる．電流と電圧の間にはコンデンサーとコイルのリアクタンスにより位相差が生じる．

【複素インピーダンス】

複素電流・電圧を用いると見通しがよくなる．複素電流$\tilde{I}(t) = I_0 e^{i\omega t}$が流れるときの複素電圧は

$$\tilde{V}_R(t) = R\tilde{I}(\mathrm{t}),\ \tilde{V}_C(t) = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I}(t),\quad \tilde{V}_L(t) = i\omega L\tilde{I}(\mathrm{t})$$

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}_R(t) + \tilde{V}_C(t) + \tilde{V}_L(t) = \left(R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L\right)\tilde{I}(t) = \left\{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right\}\tilde{I}(t) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\, I_0 e^{i(\omega t + \theta)}$$

ただし$\tan\theta = \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}$

もちろん，これら式の実部が上の 2 式と同じものになる．

回路に流れる複素電流と加わる複素電圧の比を複素インピーダンスといい，$\tilde{Z}$と書く：

$$\tilde{V}(t) = \tilde{Z}\,\tilde{I}(\mathrm{t})$$

コイルやコンデンサーを含むとき$\tilde{Z}$は交流周波数によって変化する．上の LCR 直列接続では

$$\tilde{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\, e^{i\theta},\ \ \theta = \arg \tilde{Z} = \arctan\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$$

となる．

複素インピーダンスの絶対値をインピーダンスということがある．

複素インピーダンスの単位はΩである．

【複素インピーダンスの直列接続と並列接続】

複素インピーダンス$\tilde{Z}_1$，$\tilde{Z}_2$の２つの枝を直列に接続すると，2 個の枝を流れる電流が共通であり，枝の両端に生じる電圧は個々の枝の電圧の和となるので

$$\tilde{V} = \tilde{Z}_1\tilde{I} + \tilde{Z}_2\tilde{I} = (\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2)I = \tilde{Z}\tilde{I} \rightarrow \quad \tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$$

となる.一般的には$\tilde{Z}_1$と$\tilde{Z}_2$の偏角が異なるので，$\tilde{Z}$の偏角もそれらとは異なる値となる．

$\tilde{Z}_1$，$\tilde{Z}_2$の２つの枝を並列に接続すると，2 個の枝の両端に生じる電圧が共通で，流れる電流は各インピーダンスにしたがって分岐するが全電流は各電流の和となるので

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = \frac{1}{\tilde{Z}_1}\tilde{V} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}\tilde{V} = \left(\frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}\right)\tilde{V} = \frac{1}{\tilde{Z}}\tilde{V} \rightarrow \quad \tilde{Z} = \left(\tilde{Z}_1^{-1} + \tilde{Z}_2^{-1}\right)^{-1}$$

となる．

複素電流・電圧・インピーダンスを用いて計算するときは，交流回路であっても直流回路と同じルールで素子の合成を計算できる．したがって電流電圧を複素数に拡張したキルヒホッフの法則を使うことができる．

【共振回路】

LCR 直列接続では交流の周波数によりインピーダンスが変化するので，ある特定の周波数でインピーダンスを低くすることができる．LCR 直列接続を閉じて回路にしたものを，LCR 共振回路という．この特定の周波数は共振周波数と呼び，インピーダンス

$$Z = \left|\tilde{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

が最小となる周波数，すなわち

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

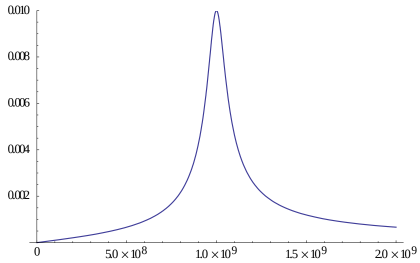
である．この回路には共振周波数の交流電流だけがたくさん流れる．電圧波形にさまざまな周波数が含まれるとき，共振周波数の電流を取り出すことができる（「回路をある周波数に同調する」という）．

共振の現象は，あるときコンデンサーに蓄えられた電場のエネルギーが回路を通してコイルに入り磁場のエネルギーとなり，つぎにコイルからコンデンサーにエネルギーが戻ることで生じる．

同じ電圧に対して流れる電流が周波数によってどのように異なるかを見るには

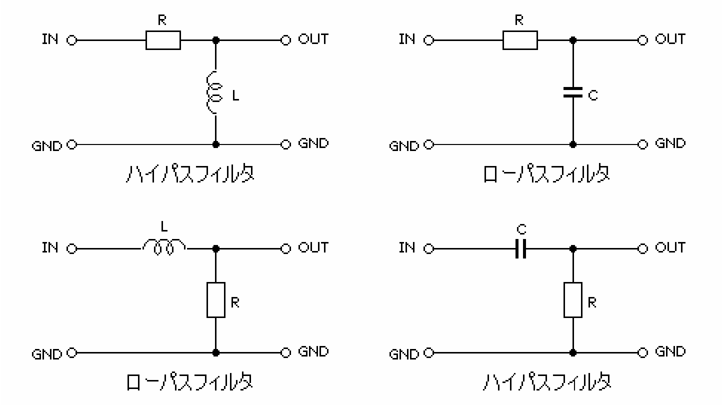
$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

のグラフ（$R \neq 0$とする）を描く．Rが小さいほど共鳴の幅が狭くなりピークが上がる（鋭い共鳴）．



【フィルター】

図のような C と R（あるいは L と R）の組み合わせにより，高い周波数の信号だけを通過させるハイパスフィルター，あるいは低い周波数だけを通過させるローパスフィルターをつくることができる．　これらの回路では，



フィルターする堺目の周波数を表すのに，その逆数に相当する「時定数」を用いることが多い．時定数は，RC 回路では

$$\tau = RC$$

RL 回路では

$$\tau = \frac{\mathrm{L}}{R}$$

である．これらの回路は「時定数回路」と呼ばれる．時定数という用語は，これらの回路にパルスを入力したときの応答に由来する（後に学ぶ）．

【有効電力】

回路の複素インピーダンスの偏角が複素電流と複素電圧の位相差θ与える．位相差が 0 のとき投入される電力が正となり，πとなるとき負，$\frac{\pi}{2}$と$\frac{3\pi}{2}$のとき0となる．

前回に学んだように，パワーの時間平均を与える複素電流と電圧の式は

$$< P > = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\tilde{I}\,\overline{\tilde{V}}]$$

である．右辺を複素インピーダンスによって表すと

$$< P > = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[\tilde{I}\overline{\tilde{Z}\tilde{I}}] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\tilde{Z}\,\left|\tilde{I}\right|^2\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[\tilde{Z}\,I_0^2] = \frac{I_0^2}{2}\,\mathrm{Re}[\tilde{Z}]$$

すなわち，複素インピーダンスの実部がこの回路で実際に消費される電力を表す．これを有効電力という．

回路がいかに複雑であっても合成された複素インピーダンスの実部を与えるのは回路中の抵抗である．コイルやコンデンサーは（力学的に仕事をしているモーターのような場合を除き）複素インピーダンスには虚数として現れるので，有効電力には寄与しない．

この項の議論は，教科書§13.4[4]と比較せよ．