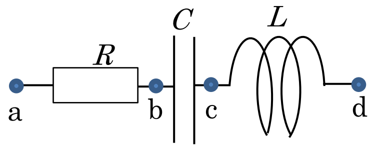
４．回路のインピーダンス

基本事項

- 交流回路のインピーダンス：単位はΩ
  - 一組の回路素子の両端に加わる電圧と流れる電流の比
    - R だけから成る回路であれば，合成抵抗の値に一致する．
    - C だけから成る回路であれば，1/(ω×合成容量の値に一致する
    - L だけから成る回路であれば，ω×合成インダクタンスの値に一致する
  - 合成インピーダンス算出のための規則
    - 直列接続した素子を流れる電流はどの瞬間も同じ値.
    - 並列接続した素子の両端の電圧はどの瞬間も同じ値.
  - C，L，R の組み合わせからなる素子
    - 電流と電圧の位相が異なる
    - 複素インピーダンス＝複素電圧÷複素電圧の比:　$\tilde{Z} = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = \frac{\widetilde{V_0}}{\widetilde{I_0}}$
    - $|\tilde{Z}| = V_0/I_0$をインピーダンスという．（複素インピーダンスをインピーダンスということもある）
- 共振
  - L と C を結合した回路では，適正な周波数に対するインピーダンスが減少する：僅かな電圧でたくさんの電流が流れる．あるいはインピーダンスが増加する：わずかな電流で大きな電圧となる回路もある．
  - 共振周波数 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
- 有効電力と無効電力

基礎の確認



Q1. 角周波数ωの交流電流が流れる図の回路について

①ac 間の複素合成インピーダンスはどれだけか.

②bd 間，③ad 間についても複素合成インピーダンスを計算せよ．③についてはその絶対値（実数で表されるインピーダンス）も求めること．

R=12Ω，ある周波数でCのインピーダンスが 9Ω，Lのインピーダンスが 4Ωであった．

④ad 間の合成インピーダンスの値を計算せよ．

⑤その周波数が 50 Hz のとき，C の値と L の値を計算せよ．［電力各社，富士通インフォテック四国，東ソー，Canon,etc］

A1. 直列接続なのでどの素子を流れる電流も同一であり，これを複素電流$\tilde{I}$とする．ab 間の電圧は$\widetilde{V_R} = R\,\tilde{I}$, bc 間の電圧は $\widetilde{V_C} = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I}$, cd 間の電圧は$\widetilde{V_L} = i\omega L\,\tilde{I}$である．

①ac 間の電圧は $\widetilde{V_{ac}} = \widetilde{V_R} + \widetilde{V_C} = \left(R + \frac{1}{i\omega C}\right)\tilde{I}$,　したがって合成インピーダンスは$\widetilde{Z_{ac}} = \widetilde{V_{ac}}/\tilde{I} = R + \frac{1}{i\omega C}$.

② $\widetilde{V_{bd}} = \widetilde{V_C} + \widetilde{V_L} = \left(\frac{1}{i\omega C} + i\omega L\right)\tilde{I}$, $\widetilde{Z_{bd}} = \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$.

③ $\widetilde{Z_{ad}} = \mathrm{R} + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$, $Z_{ad} = |\widetilde{Z_{ad}}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

④ $\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{12^2 + (4-9)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13\Omega$

⑤ $\frac{1}{\omega C} = 9\Omega \rightarrow C = \frac{1}{9\times 2\pi \times 50} = \frac{1}{900\,\pi} \simeq 3.5\times 10^{-4}$ F,　$\omega \mathrm{L} = 4\Omega \rightarrow \mathrm{L} = \frac{4}{2\pi\times 50} = \frac{1}{25\pi} \simeq 0.013$H

Q2. Q1 の回路において， $Z_{ad} = |Z_{ad}|$が最小になるのはωがどのような値か R,L,C を用いて表せ．またそのときの$|Z_{ad}|$の値はどのように表せるか．[電力各社，技術士，国家公務員 II]

A2. $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0$ すなわち $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$のとき$\widetilde{Z_{\mathrm{ad}}} = R$，よって$\left|\widetilde{Z_{ad}}\right| = R$，合成インピーダンスは純抵抗と同じ．

Q3. 複素電圧$\tilde{V} = \widetilde{V_0}e^{i\omega t}$ のもとで複素電流$\tilde{I} = \widetilde{I_0}e^{i\omega t}$が流れる回路がある．このときの消費電力の平均値(前回参照)を系の複素インピーダンスを用いて表せ．その結果を用いて Q1③で求めた LCR 直列回路の消費電力を計算せよ．

A3.$\tilde{Z} = \tilde{V}/\tilde{I} = \widetilde{V_0}/\widetilde{I_0}$.$< \mathrm{P} > = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\widetilde{I_0}\overline{\widetilde{V_0}}\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\widetilde{V_0}\overline{\widetilde{I_0}}\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\tilde{Z}\widetilde{I_0}\overline{\widetilde{I_0}}\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\tilde{Z}\left|\widetilde{I_0}\right|^2\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[\tilde{Z}]\left|\widetilde{I_0}\right|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\tilde{\mathrm{Z}}]I_0^2$

$\widetilde{Z_{\mathrm{ad}}} = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \;\rightarrow\; \mathrm{Re}\left[\widetilde{Z_{\mathrm{ad}}}\right] = \mathrm{R},\ \therefore < \mathrm{P} > = \frac{1}{2}RI_0^2$

教科書　例題 13.2 とその前の説明を参照