EM2 03 交流の複素表示

時間的にサイン波形で振動する電流や電圧を複素指数関数によって表示すると記述や計算が楽になる．複素指数関数の取り扱いを復習し，複素電流と複素電圧の基本的な用いかたを学ぶ．

【複素数】

2 個の実数の順序対$z=(x,y)$に次のように四則演算を定めたものが複素数である：

加法：$\boxed{z_1+z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)}$

0 元: $\boxed{z=0=(0,0)}$

加法の逆元：$\boxed{-z=(-x,-y)}$,　$\boxed{z_1+(-z_2)=z_1-z_2}$と書く

乗法：$\boxed{z_1\times z_2=(x_1,y_1)\times(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)}$

単位元：$\boxed{z=1=(1,0)}$

乗法の逆元：$\boxed{z^{-1}=(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}$,　$\boxed{z_1\times z_2^{-1}=\frac{z_1}{z_2}}$と書く

【純虚数】

$\boxed{i^2=-1}$となる「数」iを用いて

$$\boxed{z=x+iy}$$

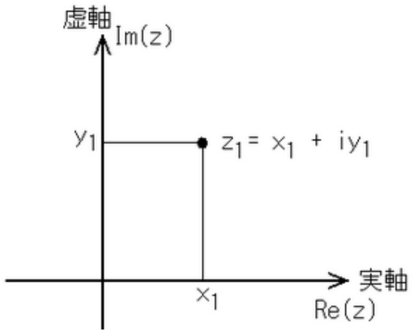
とすると上の代数構が満たされる．iを虚数単位という．

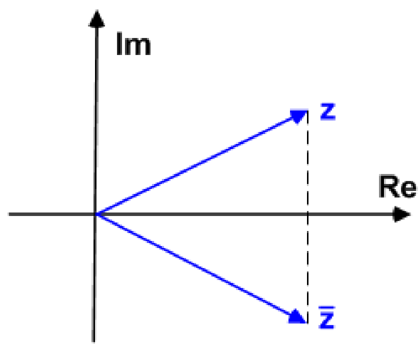
【実部と虚部】

$z=x+iy$について，xをzの実部といい$\mathrm{Re}[z]$と書き（リアルパート z と読む），yをzの虚部といい$\mathrm{Im}[z]$と書く（イマジナリーパート z と読む）．

【複素平面】

順序対(x,y)とxy座標平面上の点(x,y)を同一視するとき，この座標平面を複素平面という．x軸を実軸，y 軸を虚軸という．





【複素共役，共役複素数】

$z=x+iy$に対して$x-iy$を z の共役複素数あるいは z の複素共役といい$\bar{z}$あるいはz^*と書く．zから

$$\boxed{\bar{z}=x-iy}$$

を求める操作を「複素共役をとる」という．複素平面上で，zと$\bar{z}$は互いに実軸に対して鏡映の位置にある．複素共役は complex conjugate と書くので,

$$f(z)+\mathrm{c.c.}$$

と書くとき，c.c.は$\overline{f(z)}$を略したものである．$f(z)$が長い式のときによく用いられる．

$$\boxed{\mathrm{Re}[z]=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ \ \mathrm{Im}[z]=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})}$$

【絶対値】

複素平面上の原点と点(x, y)の距離を$z = x + iy$の絶対値といい$|z|$と書く（アブソリュート z と読む）.

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}, \quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}}$$

【複素指数関数】

指数関数のべき級数による定義：$\boxed{e^z = \exp z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots}$

zが複素数のとき，複素指数関数という：$\boxed{e^{(x+iy)} = 1 + (x + iy) + \frac{1}{2}(x + iy)^2 + \cdots}$

計算により $\boxed{e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}}$を示すことができ，べき級数による定義と指数法則は矛盾しない．もちろん$\boxed{e^0 = 1}$.

【オイラーの公式】

複素指数関数の引数が純虚数$i\theta$のとき，実部と虚部がそれぞれ$\cos\theta$と$\sin\theta$のマクローリン展開に一致する：「

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots\right) + i\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right) = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-i\theta) = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}} = e^{\overline{i\theta}}, \quad \left|e^{i\theta}\right| = 1 \text{ (単位円)}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

【極形式】

$\mathrm{z} = x + iy$が表す点は，原点から距離 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$，実軸から反時計回りに$\boxed{\theta = \arctan\frac{y}{x}}$の方向にある．すなわち

$$\boxed{z = (r\cos\theta) + i(r\sin\theta) = re^{i\theta}}$$

と表せる（z の極形式による表示）．θを z の偏角といい$\arg z$と書く（アーギュメントと読む）.

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

【等速円運動と単振動】

複素平面の単位円周上を角速度$\omega = \frac{2\pi}{T}$（周期 T）で反時計回りに等速で回転する点と時計回りに回転する点は

$$\boxed{e^{i\omega t} \text{ と } e^{-i\omega t}}$$

で表される（$t = 0$で実軸上にあるとする）．コサイン関数とサイン関数で表される同じ角振動数の単振動は

$$\boxed{\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \qquad \text{と} \qquad \sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)}$$

である.

【$e^{i\omega t}$の導関数と不定積分】

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega\, e^{i\omega t} \quad \text{と} \quad \int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega}e^{i\omega t} + \text{積分定数}}$$

導関数はその定義から

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{i\omega(t+\Delta t)}-e^{i\omega t}}{\Delta t}=e^{i\omega t}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{i\omega\Delta t}-1}{\Delta t}=e^{i\omega t}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\{1+i\omega\Delta t+\frac{1}{2}(i\omega\Delta t)^2+\cdots\}-1}{\Delta t}=i\omega\, e^{i\omega t}$$

不定積分は，tで微分すると$e^{i\omega t}$になるものを　$\int e^{i\omega t}dt$と書くことから$\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}$となる．

【複素電流と複素電圧】

$$\tilde{I}=I_0\cos(\omega t+\phi)+iI_0\sin(\omega t+\phi)=I_0\mathrm{e}^{i(\omega t+\phi)}=\boxed{\widetilde{I_0}\mathrm{e}^{i\omega t},\qquad \widetilde{I_0}=I_0e^{i\phi}}$$

の実部をとると（実数で表された普通の）交流電流$I_0\cos(\omega t+\phi)$になる．$\widetilde{I_0}e^{i\omega t}$を複素電流という．複素電流$\widetilde{I_0}e^{i\omega t}$の振幅$\widetilde{I_0}=I_0e^{i\phi}$を複素振幅という．

同様に

$$\tilde{V}=V_0\cos(\omega t+\psi)+iV_0\sin(\omega t+\psi)=V_0\mathrm{e}^{i(\omega t+\psi)}=\boxed{\widetilde{V_0}e^{i\omega t},\qquad \widetilde{V_0}=V_0e^{i\psi}}$$

の実部をとると（実数で表された普通の）交流電圧$V_0\cos(\omega t+\psi)$になる．$\widetilde{V_0}e^{i\omega t}$を複素電圧という．

　複素振幅は交流の振幅と初期位相を同時に表す．ϕとψは電流と電圧の位相を自由に設定できるようにする初期位相である．たとえば，電流が$I_0\sin\omega t$のとき電圧が$V_0\cos\omega t$となるような状況では$\phi=-\frac{\pi}{2},\psi=0$とすればよい．

【交流素子の働きを複素電流・電圧で表す】

抵抗では，電流と電圧が瞬時に比例し，複素電流と複素電圧に位相のずれが生じない：抵抗：$\tilde{V}=R\,\tilde{I}$

コンデンサーでは，$C\frac{dV(t)}{dt}=I(t)$となり，位相のずれが生じる：$\tilde{V}=\frac{1}{i\omega C}\tilde{I}=\frac{1}{\omega C}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}i}\tilde{I}$

コイルでは，$V(t)=L\frac{dI(t)}{dt}$となり，位相のずれが生じる：$\tilde{V}=i\omega L\tilde{I}=\omega\mathrm{L}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i}\tilde{I}$

【複素振幅の長所】

１つの振動数で単振動する交流が流れる回路網を解析するとき，コイルとコンデンサーで生じる位相のずれを複素振幅に組み入れることで, 直流回路の解析と同じ（係数が複素数）線形の連立方程式を解けばよいことになる．

【交流の積】

パワーのように電流と電圧の積を複素振幅によって表現するときは別途その取り扱いを考慮する必要がある．物理的に意味のある量は実数で表された

$$I(t)=I_0\cos(\omega t+\phi),\qquad V(t)=V_0\cos(\omega t+\psi)$$

$$\to\quad P(t)=I(t)V(t)=I_0V_0\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega t+\psi)=\frac{1}{2}I_0V_0\{\cos(2\omega t+\phi+\psi)+\cos(\phi-\psi)\}$$

である．$P(t)$の時間的に変動する交流成分は周波数が２倍になり

$$\frac{1}{2}I_0V_0\cos(2\omega t+\phi+\psi)=\frac{1}{2}Re[\tilde{I}\tilde{V}]$$

時間的に変動しない成分は

$$\frac{1}{2}I_0V_0\cos(\phi-\psi)=\frac{1}{2}Re\left[\tilde{I}\,\bar{\tilde{V}}\right]=\frac{1}{2}Re\left[\bar{\tilde{I}}\tilde{V}\right]$$

となる([ ]内の複素共役に注意せよ)．パワーの時間的な平均値を求めるときは交流成分の平均が０となるので，直流成分だけが現れる．