

3. 複素表示

基本事項

- 虚数単位: $\sqrt{-1} = i$ ($i^2 = -1$), 複素数: $z = x + iy \longleftrightarrow$ 複素平面, ベクトル (x, y)
 - 実部: $\operatorname{Re}[z] = x$, 虚部: $\operatorname{Im}[z] = y$
- ゼロ: $0 = 0 + 0 \times i$, 負: $-z = (-x) + i(-y) = -x - iy$, 実数倍: $\lambda z = \lambda x + i\lambda y$
- 和・差: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$, 積: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- 複素共役(共役複素数): $\bar{z} = z^* = x - iy$
 - 商: $z_1/z_2 = z_1 \bar{z}_2 / |z_2|^2$, 絶対値: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \bar{z}}$, $\operatorname{Re}[z] = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im}[z] = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- 指数関数: $e^z = \exp z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1}{n!}z^n + \dots = 1 + (x + iy) + \frac{1}{2}(x + iy)^2 + \dots$
 - $e^0 = 1$, $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
 - オイラーの公式: $e^{i\theta} = \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \dots\right) + i\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots\right) = \cos \theta + i \sin \theta$
 - $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $|e^{i\theta}| = 1$ (単位円), $e^{i\omega t}$ (反時計まわり回転)
 - 極形式: $z = (r \cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$, $|z| = r$, $\arg(z) = \theta$ (偏角), $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
 - $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, $\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$
- 微分: $\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$ 積分 (微分すると被積分関数になるもの): $\int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t}$

定義に関わる確認

Q1. 次の複素数が表す複素平面上の点を図示せよ.

- ① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$ ⑥ $\frac{1}{i}$ ⑦ $1 + i$ ⑧ $e^{\frac{\pi}{2}i}$ ⑨ $e^{\pi i}$ ⑩ $e^{-\pi i}$ ⑪ $e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ⑫ $2e^{\frac{3}{2}\pi i}$

Q2. 三角関数の加法定理: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ を, $e^{i(\alpha + \beta)}$ を用いて確認せよ.

Q3. $e^{i\alpha}$ と $z = r e^{i\theta}$ の積は, $e^{i\alpha} z = r e^{i(\theta + \alpha)}$ と表すと, z を角 α だけ回転する操作になることが分かる. 次の積は z をどのように回転する操作か. ① iz ② $\frac{z}{i}$ ③ $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$ ④ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z$

Q4. $\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}$ の関係をサインとコサインを用いて確認せよ.

Q5. $\int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t}$ の関係をサインとコサインを用いて確認せよ.

Q6. $\frac{d^2}{dt^2} e^{i\omega t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} e^{i\omega t} \right) = (i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}$ の関係をサインとコサインを用いて確認せよ.

実力・応用問題

ここで「複素電流」

$$\tilde{I} = I_0 \cos(\omega t + \phi) + iI_0 \sin(\omega t + \phi) = I_0 e^{i(\omega t + \phi)} = \boxed{\tilde{I}_0 e^{i\omega t}, \quad \tilde{I}_0 = I_0 e^{i\phi}}$$

と「複素電圧」

$$\tilde{V} = V_0 \cos(\omega t + \psi) + iV_0 \sin(\omega t + \psi) = V_0 e^{i(\omega t + \psi)} = \boxed{\tilde{V}_0 e^{i\omega t}, \quad \tilde{V}_0 = V_0 e^{i\psi}}$$

を定義する. (\tilde{I}_0 を複素電流, \tilde{V}_0 を複素電圧と呼ぶこともある.) これらの実部をとると

$$\boxed{I(t) = \text{Re}[\tilde{I}] = I_0 \cos(\omega t + \phi), \quad V(t) = \text{Re}[\tilde{V}] = V_0 \cos(\omega t + \psi)}$$

という角周波数 $\omega = 2\pi f$ の交流電流と交流電圧が表される. ϕ や ψ は電流と電圧の位相を自由に設定できるようにする初期位相である. たとえば, 電流が $I_0 \sin \omega t$ のとき電圧が $V_0 \cos \omega t$ となるような状況では $\phi = -\frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$ とすればよい.

Q7. 抵抗に関するオームの法則, 電気容量 (コンデンサー) に関する電流・電圧の式, インダクタンス (コイル) に関する電流・電圧の式を, それぞれ複素電流と複素電圧の式として表せ.

Q8. Q7 で求めた関係を, それぞれ \tilde{V} と \tilde{I} を複素平面上のベクトルによって示せ (ベクトルは回転運動しているので, ある一瞬の様子, たとえば電流ベクトルが実数軸方向を向く瞬間をとらえて示せばよい).

Q9. 2 個の素子が直列に接続され, それぞれの素子の両端の電圧が $V_{10} \cos(\omega t + \psi_1)$ および $V_{20} \cos(\omega t + \psi_2)$ のとき, 全電圧は対応する複素電圧 \tilde{V}_1 および \tilde{V}_2 を用いて $\text{Re}[\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2]$ となることを確認せよ. 2 個の素子が並列に接続されているとき全体に流れる電流は複素電流を用いて $\text{Re}[\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2]$ となることを確認せよ.

Q10. 電力 $P(t) = I(t)V(t)$ の一周りにわたる平均値 $\langle P \rangle$ を \tilde{I}_0 と \tilde{V}_0 によって表せ.