1. 磁場の空間的性質

ビオとサバールが，電流から磁場を計算する方法を与えたのとほとんど同時に
アンペールが磁場の空間的な性質と電流の関係を法則化した.

【アンペールの法則の意義】
ビオ・サバールの法則とアンペールの法則は同じ事実の別な表現である.

クーロンの法則「与えられた電荷分布から電場の計算」と
ガウスの法則「閉曲面上の電場の面積分から内部の電荷の計算」
の関係に似ている.

磁場を計算するのが目的であれば，ビオ・サバールの法則で十分である.

これから学ぶアンペールの法則は，特別に対称性がよい場合を除いて磁場の計算には使えない（ガウスの法則と似ている）.

しかし，磁場の空間的な性質を数式によって示すには，アンペールの法則が不可欠となる.

この講義の最後に学ぶマックスウェル方程式は，電場と磁場を支配する法則を表すが，そこにはガウスの法則とアンペールの法則が組み込まれる.

【出発点】
直線電流がつくる磁場の観察

2. アンペールの法則

アンペールの法則は
ループ電流がつくる磁場を周回積分した値は，積分路を貫く電流に比例する
というもの.

法則を表す式

$$\oint_{C=\partial S'} \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum_k I_k = \mu_0 \iint_{S'} \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

を読んでみよう：

[左辺]
$C = \partial S'$ ： 周回積分路 C は S' という面の縁
$\vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ ： 積分路の上の位置$\vec{r}$の磁場$\vec{B}(\vec{r})$と，径路上の微小な移動（微小な変位）$d\vec{r}$の内積を計算する
$\oint_{C=\partial S'} \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ ： 積分路を一周しながら $\vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$を寄せ集める.

[中辺]
I_k ： 積分路を貫く電流
・ 「左辺で決めた**積分路を回る方向**」に回転する**右ネジ**が進む向きの**電流を正**，逆向きの電流を負とする.
・ **積分路を貫かない電流は含めない**
$\mu_0 \sum_k I_k$ ： 積分路を貫く電流を，すべて符号付きで加え，μ_0倍する

[右辺] <中辺の内容を電流密度で表す>
S' ： 積分路Cで囲まれる面．金魚すくいの網のようなものをイメージすればよい
$\vec{j}\cdot d\vec{S}$ ： 面S'上
・ループ電流
・・ 直線電流：無限遠をまわって戻るループ電流
・・ 周回積分路を回る向きで決まる右ネジの方向の電流が正，逆方向の電流が負
・・ 周回積分路を貫かない電流は，それがつくる磁場の周回積分が 0 になる
・電流は定常電流に限る
この法則を認めれば，本章は完了する.
つづくスライドでは，アンペールの法則になれるため，法則を用いて電流から磁場を求める例を記す.

その後のスライド（＊）では,
・納得するための思考過程と
・アンペールの法則の未完成部分
について記す.
----

3. 法則の拡張

アンペールの法則は，
・　**定常**電流（時間的に変化しない電流）
・　電流は回路を流れる
・　電荷保存則により，電荷分布が**変化しない**
場合には**成立**する.
たとえば，定常電流が流れていても
　　充電中のコンデンサーに接続している
　　電荷が時間体に変化する
ような場合には**適用できない**.
以下は，すこし式がむずかしいかもしれないので，ストーリーを追うだけでもよい.
しかし，式を読み解く努力をしてみると実力がつくだろう.
時間的な変化があるときの**電荷保存則**

$$\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = 0$$

と**アンペールの法則**

$$\oint_{C=\partial S\prime} \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_{S\prime} \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

は**両立しない**（解説は後）．議論の骨子は：
・アンペールの法則の右辺の積分領域 S'は，閉じていない
・周回積分路Cで囲まれる「両側の面S_1’ とS_2’ 」により閉曲面$S = S_1$’ ＋S_2’ をつくる
・S_1’ ＋S_2’ の面を表すベクトルをSから外向きにとると，右ネジでCを回る方向がS_1’ とS_2’ で反対向きになる
・アンペールの法則をS_1’ ＋S_2’ に適用すると

$$\oint_{C=\partial S_1\prime} \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \oint_{-C=\partial S_2\prime} \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0 = \mu_0 \iint_{S_1'+S_2\prime} \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

・アンペールの法則と電荷保存則が両立できるのは

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = 0$$

　すなわち，電荷密度に時間的な変化がないときに限る.
マクスウェルは，**電荷保存則が成り立つようにアンペールの法則を拡張**した.
しかも，電荷密度を表面に出さず，ガウスの法則をもちいて（電場の時間微分により），式を拡張した：

$$\oint_{C=\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \boxed{\varepsilon_0\mu_0 \iint_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$

この拡張は理論的な推論であり，実験でたしかめたのがヘルツ.
拡張したアンペール・マクスウェルの法則が正しいと仮定すると
電場と磁場が真空中を波として伝わるという結論が得られる.
ヘルツは，この電磁波の実在と，理論的に予測される波の速さを測定した.
これが，現代社会で欠かせない電波による情報通信の起源である.

4. 直線電流がつくる磁場

アンペールの法則から，直線電流がつくる磁場を求める

・　歴史的には実験事実から法則が見つかったのだが，
　ここでは「法則」に慣れるために，歴史とは逆の議論をする.

【対称性】

(１)　「直線」という対称性による空間の性質

　(1A)　直線からの距離を一定にして回転しても，同じ

　　・・・　直線を中心とする１つの円の上なら，どこでも同等

　(1B)　直線にそって移動しても，直線からの距離が同じなら，どこでも同等

(２)　電流の向き

　・・　１つの円の上でも，回転の向きに依存する

【実験から決まる磁場の様子】

・　直線に直交する面内で，**磁場の向き**は直線を中心とする**同心円の接線**方向

　・・　半径方向や電流の方向の成分が無い

【対称性から推定される磁場の様子】

・　(1A)　:　１つの同心円上では，どこでも同じ大きさの磁場である.

・　(1B)　:　直線に直交する面内で考察すれば十分である.

アンペールの法則により，

　電流からの距離 R と磁場の大きさ B の関係

を求める.

・　周回積分路 C：　電流からの距離$r = R =$ 一定の円

・　磁場の向き$\vec{B}$とC上の微小変位$d\vec{r}$が同じ向：　$\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = B(R)dr$

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = B(R)\oint_C dr = 2\pi R\, B(R) = \mu_0 I \;\rightarrow\; B(R) = \frac{1}{2\pi\mu_0}\frac{I}{R}$$

5 無限長のソレノイドコイル内部の磁場

ソレノイド・コイル： 円筒に導線を巻いたコイル

単位長さあたり n 回巻き
電流 I
コイル（円筒）が無限に長い
・ 有限長の長細いコイルの中央付近なら，近似的に成り立つ

【内部の磁場】
・ どの位置でも円筒の軸に平行
・・ 注目する位置の，両側等距離にある，1 対の 1 巻きコイルの作る磁場の合成から推察．（教科書 例題 10.1 参照）

【コイル内部でアンペールの法則を適用】
・ **内部には電流がない**
・ 磁場の線積分は，周回路によらず，ゼロ
・ 磁力線と平行（円筒の軸と平行）な辺をもつ長方形の積分路を用いる
・ **内部の磁場は，どこでも同じ大きさ**になる

【外部の磁場】
・ 外部に磁場があるとすれば，円筒の軸と平行
・ 無限遠の磁場が 0．(コイルが**無限に長い**ので，かりに**無限遠**で磁場がゼロでなくても，不思議ではない．少し強引な推定)
・・ 有限長のコイルのときには，空間に蓄えた磁気的なエネルギーが無限大にならないためには，無限遠の磁場が０.
・・ 円筒の長さを徐々に増やし，極限として無限に長くしても，無限遠の磁場が 0 の値は「0 のまま，0 に収束する」だろう．

【コイル外部でアンペールの法則を適用】
・ **外部には電流がない**
・ 磁場の線積分は，周回路によらず，ゼロ
・ 円筒の軸と平行な辺をもつ，無限遠を通る長方形の積分路を用いる
・ 外**部の磁場は，どこでも無限遠と同じゼロ**になる

【コイルの電流が貫く周回路にアンペールの法則を適用】
・ 円筒の軸と平行な長さLの辺（コイル内部と外部）をもつ長方形の積分路
・ 内部磁場は，軸と平行だが，軸からの距離rに依存する可能性が残っている： $B(r)$
・ 周回積分では，内部磁場のところだけに値がある，貫く電流は巻き数$(nL) \times I$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = BL = \mu_0 nL \times I \ \rightarrow B = \mu_0 nI$$

磁場の大きさは，ソレノイド内部なら，どこでも同じ

6. 磁場の計算の図解

7. 磁場の空間的性質（＊）　アンペールの法則を納得するために(1)

直線電流に垂直な面内で，磁力線は電流を中心とする円となる.
- 磁場の大きさ：$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$
- 磁場の向き：円の接線方向，電流の向きに右ネジが進む回転方向

【中左図】
１つの磁力線（半径Rの円C）にそって，右ネジの回転方向（反時計まわり）に磁場の周回積分を行う：　$\oint_C \vec{B}(r)\cdot d\vec{r}$
すなわち，積分路上のある点$\vec{r}$の磁場$\vec{B}(\vec{r})$と，その点から積分路上の微小な変位$d\vec{r}$との**内積**をとり，積分路全体で寄せ集める.
- 円 C 上で，$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}=$ 一定,
- 磁場の向きと微小変位の向きが常に同じ：$\vec{B}\cdot d\vec{r}=Bdr\cos\theta=Bdr$

よって

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\times\oint_C dr=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\times 2\pi R=\mu_0 I$$

となり，C の半径によらず同じ値．しかも，積分路が囲む電流だけによって決まる値となる.

【中図】
２つの同心円 C,C’を２つの半径で切り取ってできる扇形のまわりで周回積分を行う.
- C 上でも，C’上でも，同じ方向に１周すると同じ値になる：　$\oint_C \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\oint_{C'}\vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\mu_0 I$
- １周ではなく，中心を見込む角 α の部分$C\alpha$での線積分は，$\int_{C\alpha}\vec{B}\cdot d\vec{r}=\frac{\alpha}{2\pi}\mu_0 I$
- 逆向きに一周すると，$\vec{B}\cdot d\vec{r}=-Bdr$だから，$\oint_{-C}\vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=-\mu_0 I$ となり，積分結果の符号が逆になる.
- 半径方向の線積分は，$\vec{B}\perp d\vec{r}$ だから，$\vec{B}\cdot d\vec{r}=0$：$\int_{半径}\vec{B}\cdot d\vec{r}=0$

以上を総合すると

$$\oint_{扇形}\vec{B}\cdot d\vec{r}=\oint_{C'\alpha}\vec{B}\cdot d\vec{r}-\oint_{C\alpha}\vec{B}\cdot d\vec{r}=0$$

内部を電流が貫かないとき磁場の周回積分は 0 となる.

【右図】
どんな形の積分路でも，非常に小さな半径方向の移動と同心円上の移動の組みあわせで表せる.
直線電流と直交する面内で磁場の周回積分を行うと
μ_0 ×積分路を貫く電流
を得る.

8. 直線電流と任意の経路（＊）　アンペールの法則を納得するために(2)

積分路が立体的なとき，

　電流と平行な径路と

　電流に直交する面内の円弧と半径

を合成したものと考える.

電流に平行な径路では，磁場が常に直交し，線積分が 0

直線電流の周囲の空間では，任意の径路で磁場の周回積分を行うと

周回路を電流I（＝0 も含む）が貫くとき

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I, \quad \cdots C\text{を貫く電流}I$$

となる.

9. 複数の直線電流（＊）と任意の積分経路（＊）

アンペールの法則を納得するために(3)

10 円ループ電流と無限に長い積分路（∗）

アンペールの法則を納得するために(4)

11 アンペールの法則（＊）　複数の（円）ループ電流と任意の形の積分路

アンペールの法則を納得するために(5)

12　任意の電流と　任意の積分路（＊）

アンペールの法則を納得するために(6)

13 アンペールの法則と電荷保存則（＊）

アンペールの法則は電荷密度が時間的に変動しないときだけ成立する

アンペールの法則は，
- **定常**電流（時間的に変化しない電流）
- 電流は回路を流れる
- 電荷保存則により，電荷分布が**変化しない**

場合には**成立**する．

- アンペールの法則の右辺の積分領域 S'は，閉じていない
- 周回積分路Cで囲まれる「両側の面S_1' とS_0' 」により閉曲面$S = S_1' + S_0'$ をつくる
- $S_1' + S_0'$ の面を表すベクトルをSから外向きにとると，右ネジでCを回る方向がS_1' とS_0'で反対向きになる
- アンペールの法則を$S_1' + S_0'$ に適用すると

$$\oint_{C=\partial S_1'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \oint_{-C=\partial S_0'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 = \mu_0 \iint_{S_1'+S_0'} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- アンペールの法則と電荷保存則が両立できるのは

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0$$

すなわち，電荷密度に時間的な変化がないときに限る．

14．アンペールの法則と電荷保存則（＊）

アンペールの法則は，定常状態でないと破綻する
たとえば，定常電流が流れていても
　　　　充電中のコンデンサーに接続している
　　　　電荷が時間体に変化する
ような場合には**適用できない**.

同じ周回積分路Cに対して，電流が貫く面S_0と，電流が貫かないS_1を考える.

アンペールの法則は

$$\oint_{-C=\partial S_0} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_{S_0} \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\mu_0 I$$

$$\oint_{C=\partial S_1} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$

一方

$$\oint_{C} \vec{B}\cdot d\vec{r} + \oint_{-C} \vec{B}\cdot d\vec{r} = 0$$

はいつも成り立つから，矛盾が起きる.

15　マクスウェルによる発見(*)

マクスウェルは，**電荷保存則が成り立つようにアンペールの法則を拡張**した．

しかも，電荷密度を表面に出さず，ガウスの法則をもちいて（電場の時間微分により），式を拡張した：

$$\oint_{C=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \boxed{\varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

２つ前のスライドと同様に，S_0とS_1に上式を適用して，和をとると

$$\oint_{-C=\partial S_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} + \oint_{C=\partial S_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$$

は，そのままだが，右辺を

$$\mu_0 \iint_{S_0+S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \iint_{S_0+S_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

とおいたものが，電荷保存則に一致する．実際，**電荷保存則**

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0$$

の左辺第二項は，ガウスの法則およびガウスの発散定理により電場で表すことができ

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}\right) dV = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

この拡張は理論的な推論であり，実験でたしかめたのがヘルツ．

拡張したアンペール・マクスウェルの法則が正しいと仮定すると
電場と磁場が真空中を波として伝わるという結論が得られる．

ヘルツは，この電磁波の実在と，理論的に予測される波の速さを測定した．
これが，現代社会で欠かせない電波による情報通信の起源である．