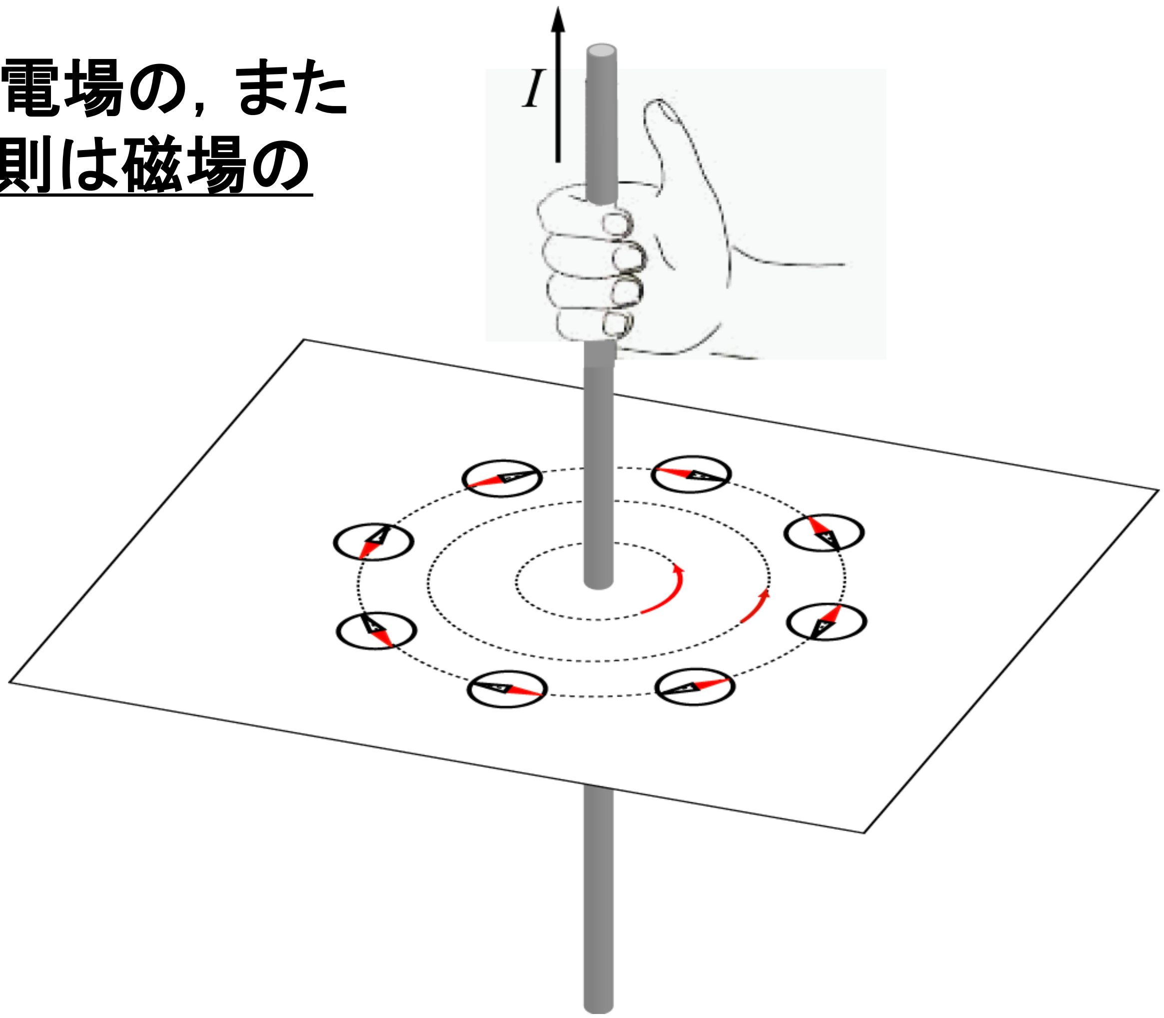
磁場の空間的な性質

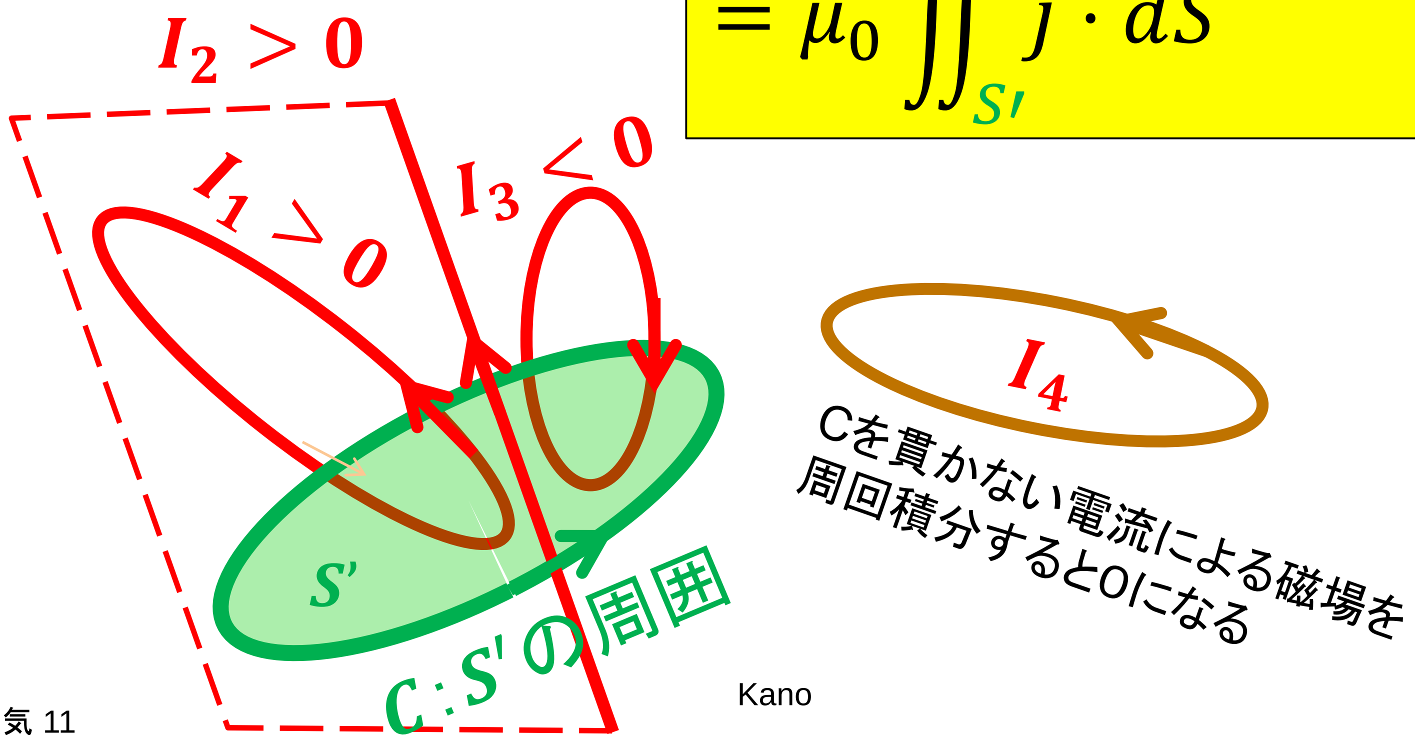
ガウスの法則は電場の，また
<u>アンペールの法則は磁場の</u>
<u>空間的な性質</u>
を表す



アンペールの法則

定常電流がつくる磁場の
周回積分は,
積分路を貫く電流
に比例する

$$\oint_{C=\partial S'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum_k I_k$$
$$= \mu_0 \iint_{S'} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



アンペールの法則の拡張

- アンペールの法則
  - 時間的に<u>変化しない</u>電流，電荷分布だけ
  - 時間変化があるとき電荷保存則を満たさない
- アンペール・マクスウェルの法則
  - 理論の推測 → 実験で確認
  - 電磁波の存在

$$\oint_{C=\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_0\mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

直線電流がつくる磁場

- 磁場について定性的な性質を見極める
  - 空間の性質
    - 直線に沿って移動しても不変
    - 直線からの距離が一定の円上で移動しても不変
  - 実験
    - 磁場の向き：円の接線方向
- 法則の適用で，磁場の大きさの詳細を決める

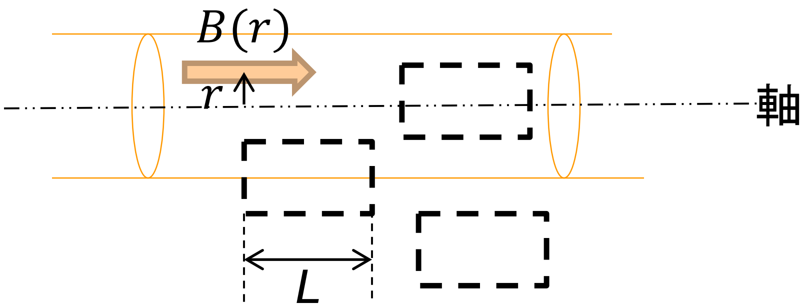
半径R = の円：　$\vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = B(R)dr$

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = B(R)\oint_C dr = 2\pi R\, B(R) = \mu_0 I$$

$$B(R) = \frac{1}{2\pi\mu_0}\frac{I}{R}$$

無限長のソレノイドコイル内部の磁場

- 磁場について定性的な性質を見極める
  - ペアの1巻きコイルが2等分面につくる磁場
    - 対称性から，軸と平行
    - ソレノイド全体を，ペアのコイルの集まりとする
  - 円筒軸から無限に離れた位置で磁場が0
- 法則の適用で，磁場の大きさの詳細を決める
  - 巻き線の密度 n
  - 周回路を貫く電流 nLI
  - 内部の磁場 : B
  - 外部の磁場 0

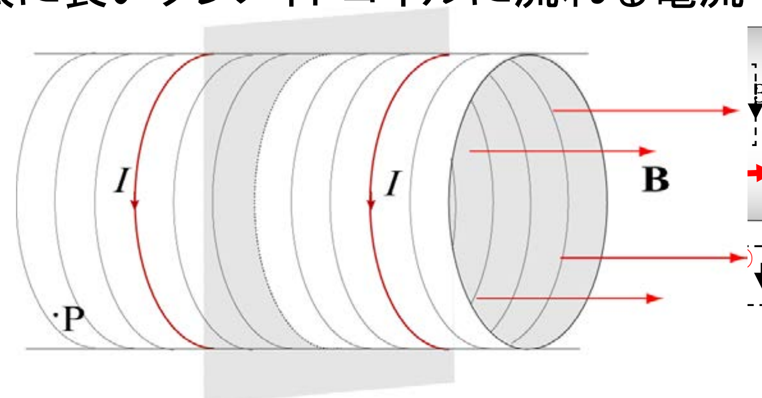


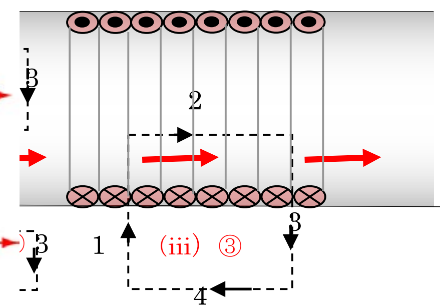
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = BL = \mu_0 nL \times I \ \rightarrow \ \boxed{B = \mu_0 nI}$$

磁場の計算の図解

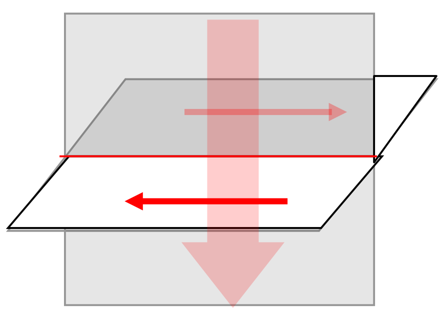
対称性から磁場の向きなどが分かっているとき

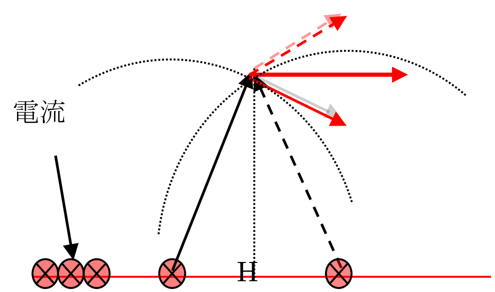
無限に長いソレノイドコイルに流れる電流

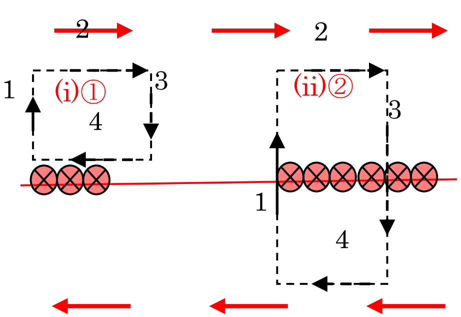




平面を流れる一様な電流

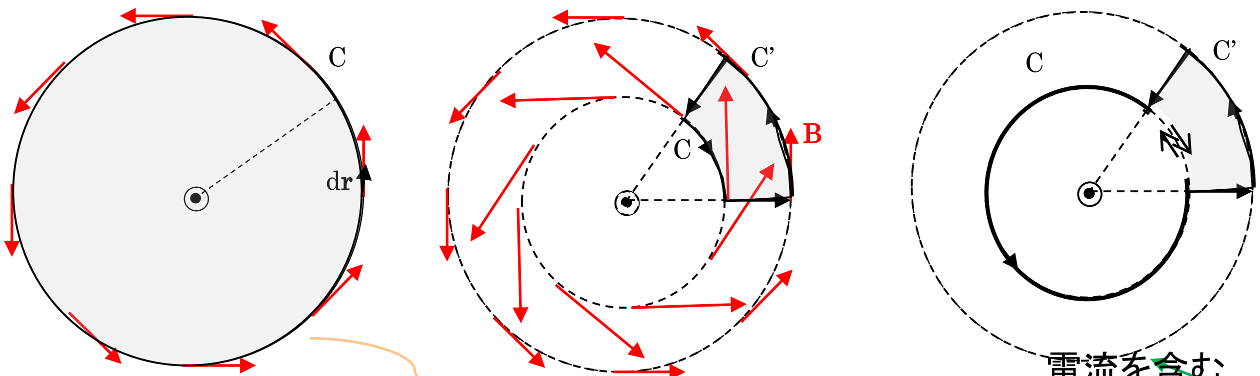


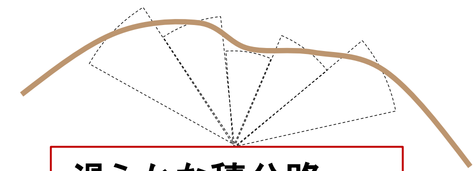




磁場の空間的性質（＊）

直線電流の周囲の磁場を周回積分





滑らかな積分路
を電流を中心とする
微小な円弧と半径
に分割

電流を含む

電流を含まない

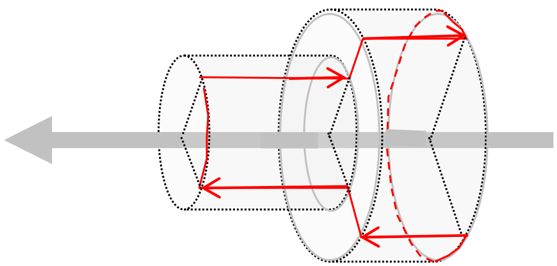
左図 $\displaystyle \oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R} \times \oint_C dr = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R} \times 2\pi R = \mu_0 I$ ←電流Iが貫く積分路

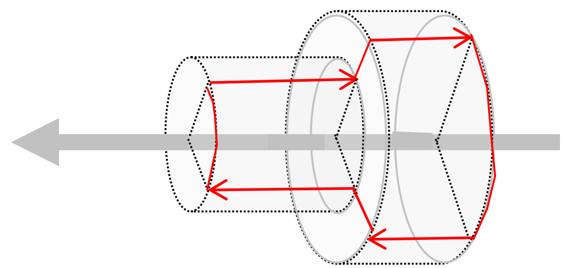
中左図 $\displaystyle \oint_{\text{扇形}} \vec{B} \cdot d\vec{r}$ ＝逆向きの2つの円弧と2つの半径上の線積分

$= 0$ ←電流 I=0 が貫く積分路

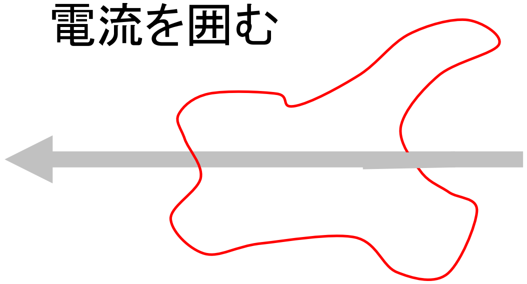
直線電流と任意の経路（＊）

電流と平行に移動するとき
磁場と変位が直交するので
この部分の線積分が0になる

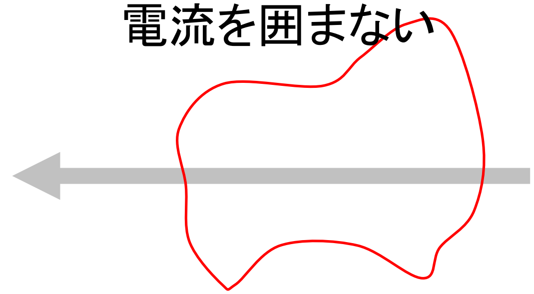




電流を囲む



電流を囲まない

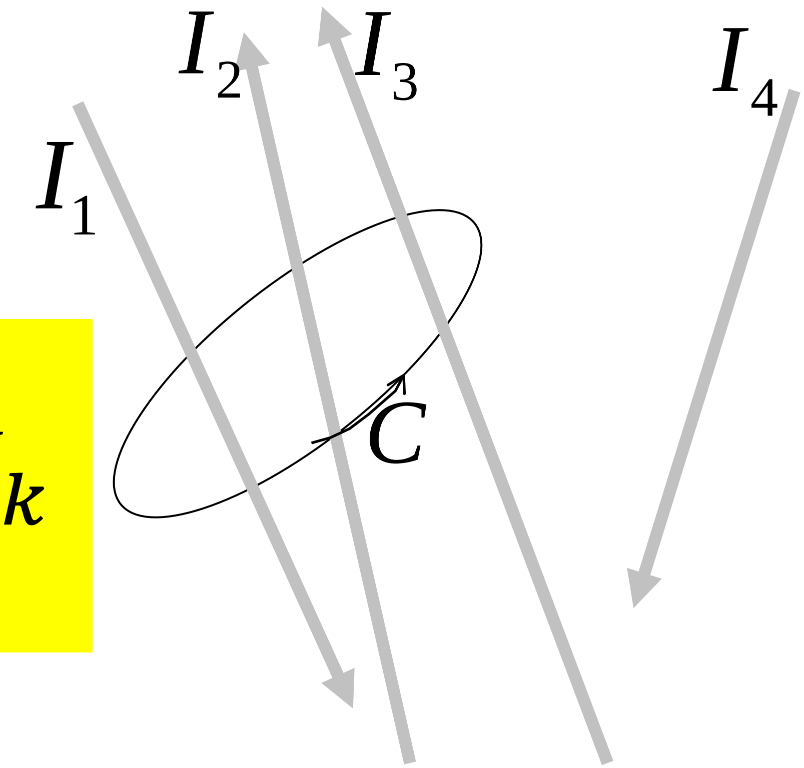


$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I, \qquad \cdots C\text{を貫く電流}I$$

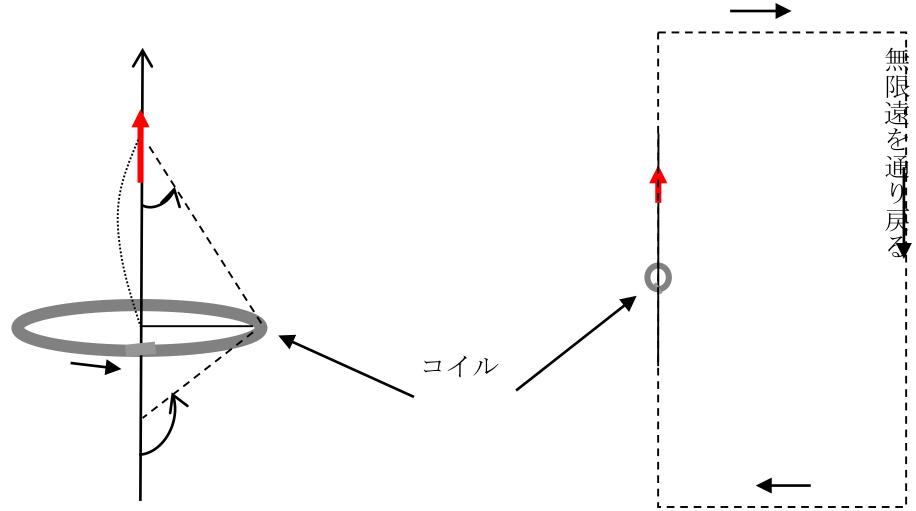
複数の直線電流(＊)
任意の積分経路(＊)

磁場の線積分の値は
積分路が囲む電流の和
に比例する

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum_k I_k$$



円ループ電流と無限に長い積分路（＊）



磁場の線積分は電流に比例し
比例係数は直線電流のときと同じ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\pi}^{0} B(\theta)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{a}\int_{\pi}^{0}\frac{-a\sin^3\theta}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0}{2}I\left(-\int_{\pi}^{0}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)$$

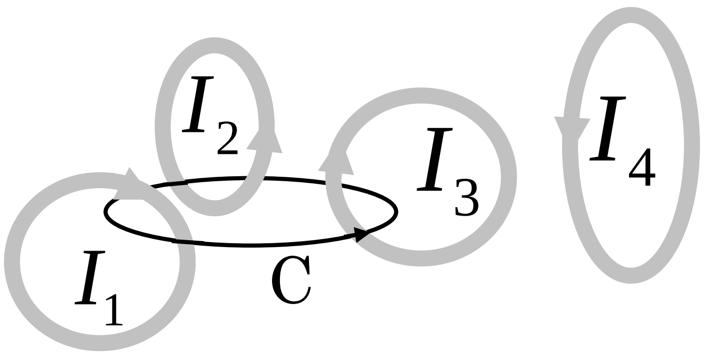
$$= \frac{\mu_0}{2}I\left[\cos\theta\right]_{\pi}^{0} = \frac{\mu_0}{2}I\left[\cos 0 - \cos\pi\right]$$

$$= \mu_0 I$$

アンペールの法則(＊)
複数の(円)ループ電流と任意の形の積分路

磁場の線積分は積分路と「絡み合う」電流に比例する

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum_k I_k$$



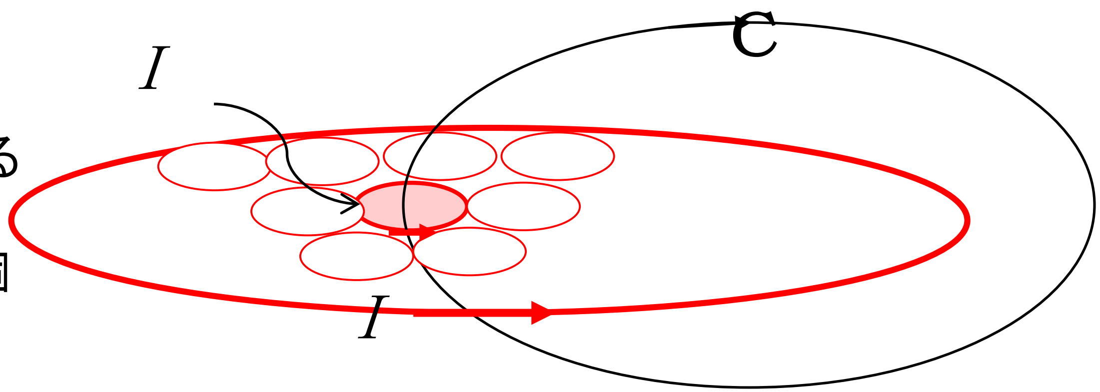
電流密度を用いて表す

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

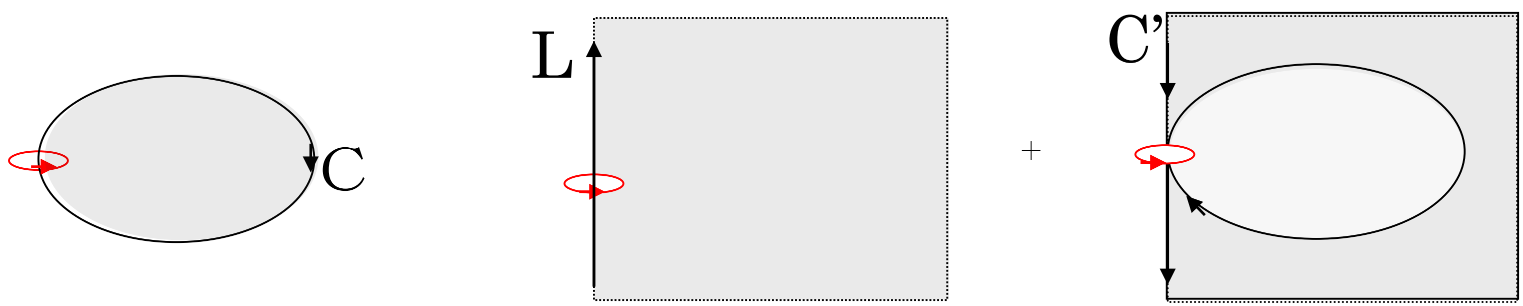
任意の電流と　任意の積分路（＊）

電流を
微小な円ループで構成する

積分路と絡むループは１個

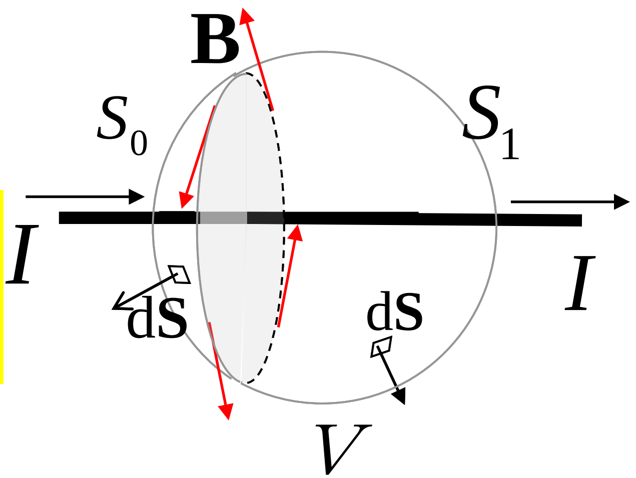


積分路　C　を
無限に長い　L　（および無限遠を回る経路）と、
電流ループを通過しないC ‘とから構成する



アンペールの法則と電荷保存則(＊)

電荷保存則:
定常電流、電荷分布は時間的に一定
電流密度の面積分は0



$$\iint_{S_0+S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = 0$$

アンペールの法則:

$$\oint_{-C=\partial S_0} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_{S_0} \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\mu_0 I$$

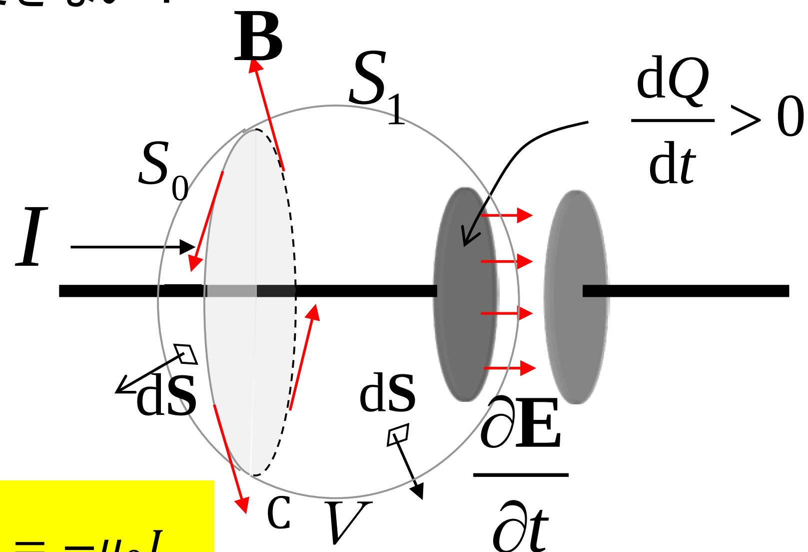
$$\oint_{C=\partial S_1} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} + \oint_{-C} \vec{B}\cdot d\vec{r} = 0$$

定常状態について、アンペールの法則と電荷保存則は矛盾しない

アンペールの法則と電荷保存則（＊）

時間的に変化する状況、たとえば、
電流は一定だが電荷分布が変動するとき、
アンペール則は適用できない！



$$\oint_{-C=\partial S_0} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_{S_0} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\mu_0 I$$

$$\oint_{C=\partial S_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{C} \vec{B} \cdot d\vec{r} + \oint_{-C} \vec{B} d\vec{r} = 0 \neq -\mu_0 I$$

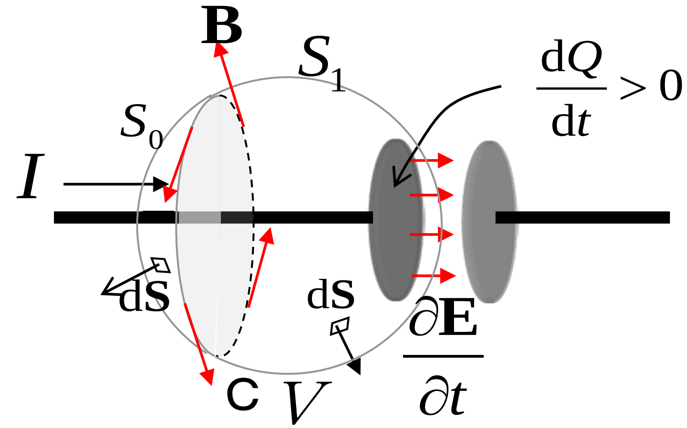
矛盾！

マクスウェルによる発見(*)

- 時間的に変化する状況に拡張する

$$\oint_{\mp C=\partial S_{0,1}} \vec{B}\cdot d\vec{r} = 0 =$$

$$= \mu_0 \iint_{S_{0,1}} \vec{j}\cdot d\vec{S} + \boxed{\varepsilon_0\mu_0 \iint_{S_{0,1}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$



電荷保存則とガウスの法則

$$\iint_{S_0+S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \iint_{S_0+S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} + \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E}\right) dV$$

$$= \iint_{S_0+S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_{S_0+S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_0+S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} + \boxed{\varepsilon_0 \iint_{S_0+S_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}} = 0$$

電荷保存則によってとおいた