1 電荷は不滅

電荷保存則：電荷は生成することも消滅することもない.
・電荷が生成（消滅）したように見えるときは，正負同量の電荷が同時に生成（消滅）し，全体として電荷の量が変わらない.

高度な注意事項
・電荷は運動するとき，速さによって量が変わらない.（非常に高速の場合，電荷密度は変わる）

電流と電荷保存則
電流は電荷の流れだから，電流の空間的な変化が電荷分布の時間的変化と関係する（後述）

2. 交通渋滞

交通渋滞を観察すると，電流と電荷分布の関係を理解できる.
自動車を「電荷をもった粒子（荷電粒子)」と考えよう.
電荷保存則は「自動車は道路の上で消えたり生じたりしない」となる.

[上図]

道路を右から左に一定の交通量で自動車が流れている.
右側が時速 50 キロ，中間に徐行部分，左側がふたたび 50 キロ.
徐行部分では交通渋滞が起きる.
言い換えると，同じ電流が流れるとき，荷電粒子の流れが遅いと電流の密度が増える.
電流を担う荷電粒子の密度も増える.

電流密度（交通量） = 荷電粒子の密度（渋滞の程度）×速度

しかし，渋滞があっても，渋滞の様子は時間的に変化しない.

[下図]

道路の左端が通行止めになっているのに，一定の交通量で自動車がやってくる.
通行止めのところでは，どんどん車の量が増え続ける.
電流の密度が空間的に変化するとき（通行止め)，電荷の分布が時間的に変化する.

3. 電流と電荷の関係

前のスライドで，交通渋滞の例を使って，電流と電荷分布の関係を観察した．
ここでは，状況を数学的に表そう．

直線の導線に電流が流れている（電流の向きを x 軸正方向とする）．
時刻 t， 位置 x における電流を I (x, t) とする．
電流を担う電荷の密度を λ（ラムダ）とする．（金属の場合，自由電子の密度）
電荷はすべて x 軸上にあるので，電荷密度の単位は C/m となる．線密度という．

導線の微小部分 [x, x + Δx] に含まれる電荷は，ある時刻 t におてい

$$\Delta Q(t) = \lambda(x,t)\Delta x$$

となる．これは，微小部分内部で電荷密度が一定であるとした式である．

この微小部分の左端 x の位置からは，電流 I(x, t) が流入し
右端 x + Δx の位置からは，電流 I(x + Δ x） が流出する．
（「電流 I が流入」というとき「もし I が負なら流出になる」という前提で言っている．）
この微小部分で Δt の間に増える電荷$\Delta Q(t+\Delta t)-\Delta Q(t)$は

入ってきた電荷 － 出て行った電荷

だから

$$\{I(x,t)-I(x+\Delta x,t)\}\times\Delta t$$

である．

総合すると

$$\Delta Q(t+\Delta t)-\Delta Q(t)$$
$$=\{\lambda(x,t+\Delta t)-\lambda(x,t)\}\times\Delta x=\{I(x,t)-I(x+\Delta x,t)\}\times\Delta t=-\{I(x+\Delta x,t)-I(x,t)\}\times\Delta t$$

両辺を$\Delta x\times\Delta t$ で割り， $\Delta x\to 0$, $\Delta t\to 0$ の極限をとると，

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=-\frac{\partial I}{\partial x} \quad\rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial x}=0}$$

を得る．

この式の読み方：

ある時刻 t に，位置 x で見た電流の空間的な変化$\frac{\partial I}{\partial x}$ （$\frac{\partial I}{\partial x}>0$ のとき，位置 x から流出する電流が流入する電流より多い）と，同時刻同位置で見た電荷密度の時間的変化$\frac{\partial\lambda}{\partial t}$ （$\frac{\partial\lambda}{\partial t}<0$ のとき，時間とともに電荷密度が減っている）は，符号が異なり大きさが同じである．正味で流出した電流は，すべて電荷の減少でまかなわれる．

4．電流密度

「電流より電流密度がむしろ本質的に重要な量である」

導線を流れる電流については，大きいか小さいか，どちら向きか，を知ればそれ以上の情報はいらない．
しかし，同じ大きさの電流でも，広い断面を通過して流れるか，小さな断面を通過して流れるかにより，物理現象が異なる．

たとえば，微小な電流であっても，非常に小さな領域に集中すれば，物質を破壊することもある．
逆に大きな電流であっても，非常に大きな領域に広がって流れるならば，影響が小さい．

[電流密度の定義]
電流密度は，電流がどの程度集中して流れているかを示す量である．
全電流 I が断面積 S に垂直に流れるとき，さらに電流密度が一様なとき

$$j = \frac{I}{S}$$

を電流密度という．同じ電流でも断面積が小さ（大き）ければ電流密度が大き（小さ）い．

[単位]
この定義から分かるように，電流密度の単位は [A/m^2].

[電流密度から電流を求める]
電流密度が分かっているとき，面積 S の断面を通過する電流を求めるには

$$I = jS$$

すなわち，電流密度と面積の積を計算すればよい．

[電流密度ベクトル]
電流密度がわかっているとき，それと垂直でない面を通過する電流を求めるにはどうすればよいだろうか．
まず，電流密度は向きがあり，ベクトル量である．
そこで，ある面と垂直でない電流密度は，面と垂直な成分と平行な成分のベクトル和で表せる．
その面に平行な電流密度の成分は，面を通過しない電流である．
その面を通過する電流としては，面と垂直な成分だけに注目すればよい．
電流密度ベクトルと，面の法線（面と垂直な方向）方向のベクトルの内積を計算するのがよいと気づく．

5．断面の向き

面の向きを表すのに
・大きさが面積
・向きが面の法線方向
なるベクトルを用いる．

もちろん，面は平坦で，どこでも同じ向きとする．

実は，面には裏と表があるので，法線の方向も両向きになる．
・さいころの表面のように，閉じた面のときは，内側（裏）から外側（面）に向くベクトルを面のベクトルとする．
・裏表が同等の場合というのは，縁があるはずである．縁を回る向きを決め，右ネジの法則で面のベクトルの向きを決める．
　（面の向きと縁を回る向きを独立には決めない，と言っているだけだが．）

平面 S を表すベクトルを$\vec{S}$と書く．

電流密度ベクトル$\vec{J}$ を$\vec{S}$の向きと平行（面Sの法線方向）の成分$\vec{J}_{//}$と垂直(面 S に沿った方向)の成分 $\vec{J}_{\perp}$に分解する：$\vec{J} = \vec{J}_{//} + \vec{J}_{\perp}$

$\vec{J}$と$\vec{S}$ の内積をつくると，

$\vec{J}_{//} \cdot \vec{S} = |\vec{J}_{//}||\vec{S}| \cos 0 = |\vec{J}_{//}||\vec{S}|$ および$\vec{J}_{\perp} \cdot \vec{S} = |\vec{J}_{\perp}||\vec{S}| \cos 90° = 0$

より

$\vec{J} \cdot \vec{S}$ =S を垂直に貫く電流密度×面積 S＝S を貫く電流

となる．

6．電流密度の面積分

前のスライドでは，面と電流密度の向きが（垂直から）一般化された.

しかし，面は平面に限られ，電流密度は面内で一様という制約があった.

任意の滑らかな曲面 S を通過する電流の計算方法を示す. 電流密度も, 位置により向きと大きさが異なるとする.
１．曲面を小さな面素（面積素片）に分解する.
２．ひとつの面素に注目すると，非常に小さいので曲面であってもほぼ平面としてよく，また電流密度も内部ではほぼ一定とみなせる.
３. 注目する面素ベクトルを　$d\vec{S}$　と書くと，前ページの結果を用いて，この面素を通過する電流は，$dI = \vec{j}\cdot d\vec{S}$
４．どの面素についても同じ式なので，S の全域にわたりdIを寄せ集めると，S を通過する全電流となる：

$$I = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

たとえば，xy 座標平面上の４点，原点 (0,0,0)，A(1,0,0), B(0,1,1), C(0,1,0)を結ぶ正方形 S を通過する電流密度は，$d\vec{S} = (0,0,dydz)$として

$$I = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iint_S j_z(x,y,0)\,dydz = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\, j_z(x,y,0)$$

と計算する.

また，たとえば原点を中心とする半径 R の球面を通過する全電流は，位置ベクトルを$\vec{r}$と書くと，
$d\vec{S} = \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) dS$，すなわち球の表面は常に半径方向（位置ベクトルの向き）を向くので，この向きの単位ベクトル$\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$によって向き，大きさとしては dS とする.

$$I = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{j}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) dS$$

$$= \textit{球面上の各点で}\vec{j}\textit{の半径方向成分の大きさに}dS\textit{をかけて寄せ集める}$$

と計算する.

7.　閉曲面を出入りする電流

任意の曲面を通過する電流の式

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

を閉曲面に適用するとき，面素ベクトルはどの位置でも「外向き」となる．

電流が閉曲面に入るとき，電流の向きと面素ベクトルの向きは反対方向（90 度より広い）となるので，$\vec{j} \cdot d\vec{S} < 0$ となり
電流が閉曲面から出るとき，電流の向きと面素ベクトルの向きは同じ方向（90 度より狭い）となるので，$\vec{j} \cdot d\vec{S} > 0$ となる．

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

の値は，$\vec{j} \cdot d\vec{S}$　寄せ集めたものだから，閉曲面から外部に流出する電流が（流入するよりも）多いとき，

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} > 0$$

となる．すなわち．正味で流出（流入）が多いとき，正（負）である．

8. 閉曲面内部の全電荷，　その時間的変化

電流を積分で表現したので，閉曲面内部の電荷も積分で表す.

電荷密度をρとする.

S 全体で電荷密度が一様ならば，S に含まれる全電荷は

$$Q = \rho \times V$$

すなわち，電荷密度×S の内側の体積　である.

電荷密度が一様でないとき，またさらに時間的にも変化するときは，ρが位置と時間の関数になる：　$\rho(\vec{r}, t)$

V の内部を細かく分け，そのひとつの体積素片 $dV = dxdydz$ に注目すると，その内部ではρがほとんど一定.
したがってdV内部の電荷は$\rho \times dV$となる．これを V 全体で寄せ集める：

$$Q(t) = \iiint_V \rho dV = \iiint_V \rho(x, y, z, t) dxdydz = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dxdydz = \iiint_V \rho(\vec{r}, t)\, dV = \int_V \rho dV$$

いろいろな書き方がある！

位置座標と時間の関数$\rho(\vec{r}, t)$を座標で定積分するので，積分のあとは時間だけの関数$Q(t)$となっている.
電流の流入出があるときは，$Q(t)$が時間的に変化する.

電流が正味で流出するとき，内部の電荷が減るから $\frac{dQ}{dt} < 0$ となる.

おなじく電流が正味で流出するとき，前スライドで見たように，$I > 0$.

こうして，符号に注意して

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

となる.

9. 電荷保存則

電荷保存則

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

を電流密度や電荷密度の積分で表す:

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV \quad \rightarrow \quad \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV$$

10. 発散定理

微小な立体 $dxdydz$ の表面ΔS上の積分

$$\iint_{\Delta S} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

を考察する．

まず，この立体は，すべての辺が座標軸に平行であるとする．したがって，すべての面が座標軸に垂直である．言い換えると，どの面のベクトルも座標軸と平行である．

x 軸と直交する面は枚ある．一方は x の位置に，他方は x+dx の位置にあるので$\Delta\overrightarrow{S_x}$ と $\Delta\vec{S}_{x+\Delta x}$ と書くことにする．

$\Delta\overrightarrow{S_x}$ *はx軸の負の向き，* $\Delta\vec{S}_{x+\Delta x}$*はx軸の正の向き，大きさは両方とも* $\Delta y\Delta z$

となる．

$\Delta\overrightarrow{S_x}$の上の積分は

$$\iint_{\Delta S_x} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot \Delta\vec{S}_x = -j_x(x, y, z)\Delta y\Delta z$$

となる．

第１の等号は，面が非常に小さいので電流密度を一様とした．

第２等号は$\Delta\overrightarrow{S_x}$ *はx軸の負の向き，大きさは両方とも* $\Delta y\Delta z$*だから．*

$j_x(x, y, z)$の変数は，面の x 座標が x であることを示している．

同様に

$\Delta\overrightarrow{S_x}$の上の積分は

$$\iint_{\Delta S_{x+\Delta x}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot \Delta\vec{S}_{x+\Delta x} = j_x(x + \Delta x, y, z)\Delta y\Delta z$$

となる．ふたつの積分を組にして和をとると

$$\iint_{\Delta S_x} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Delta S_{x+\Delta x}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \{j_x(x + \Delta x, y, z) - j_x(x, y, z)\}\,\Delta y\Delta z \;= \frac{j_x(x + \Delta x, y, z) - j_x(x, y, z)}{\Delta x}\,\Delta x\,\Delta y\Delta z$$

$$\simeq \frac{\partial j_x}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\Delta z$$

６面すべてについて和をとると

$$\iint_{\Delta S} \vec{j} \cdot d\vec{S} \simeq \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

を得る． 以上は微小な ΔS についての面積分だった．

つぎに，普通の大きさの体積を囲む閉曲面を考察する．この体積を，細かく切り刻んで出来た微小な立体のひとつの表面が，さっきの ΔS である． ２つの隣り合う微小な立体に共有される微小な面は，面のベクトルの向きが逆になるので，面積分が打ち消しあう:

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \text{すべての}\iint_{\Delta S} \vec{j} \cdot d\vec{S}\ \text{の和} = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right)\Delta V\,\text{の和} = \iiint \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right)dV$$

よって

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right)dV$$

これをガウスの発散定理という

11. ガウスの発散定理とナブラ・ドット

前のスライドの重要な結論は「ガウスの発散定理」

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) dV$$

だった.

まず，この定理の意味を観察しよう.

左辺は，閉曲面 S 上で電流密度ベクトル$\vec{j}$ を面積分している．言い換えると，ある時刻に S から正味で流出する電流を計算している.
右辺は，S の内部で正味で“わき出す”電流（湧き出す量 － 吸い込む量）を計算する.

発散定理は，
１．内部で湧き出したものがすべて，内部に吸い込まれるなら，表面を通過する流れは正味でゼロ.
２，内部で湧き出したものの一部しか内部に吸い込まれないなら，表面を通過する流れはその差分に等しく正味で正（流出が勝る）.
３．内部で湧き出したものより，内部で吸い込まれる量が多いなら，表面を通過する流れはその差分に等しく正味で負（流入が勝る）.
を意味する.

右辺の被積分関数は，様々な場面で現れるため，特別に記号化され名前がついている：

$$\mathrm{div}\ \vec{j} = \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

は「ダイバージェンス　j」,「ナブラ　ドット　j」　「j　の発散」などと呼ぶ.

電流密度ベクトルに限らず，滑らかに変化するベクトル場 $\vec{\mathrm{A}}$ について

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

すなわち，ベクトル$\vec{\mathrm{A}}$の各成分を対応する座標で偏微分して和をとる計算を行い，ベクトル場 $\vec{\mathrm{A}}$の発散をもとめる.

$\nabla \cdot \vec{A}$　は，一般に座標と時間によって変わる実数の量（スカラー）であり，
ベクトル場 $\vec{\mathrm{A}}$の「ある性質」を空間の各点ごとに表現している．その性質は，（電流，流体の流れ，etc）を例にすると表現しやすい.

ある位置と時刻における$\nabla \cdot \vec{A}$の値は，その位置でその時刻に流れが湧き出して入れば正，流れが通過するだけならゼロ，流れが吸い込まれていれば負.

すなわち湧き出しと吸い込みの大きさを数値で表している.

12. 電荷保存則

1 次元の電流 $I(x,t)$と電荷の線密度について，電荷保存則が

$$\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{\partial \lambda}{\partial t}=0$$

と書けることをすでに学んでいる（スライド３）．右辺の$\frac{\partial I}{\partial x}$は 1 次元の発散と考えてよい.

ある位置，ある時刻において，電荷密度の時間的変化 ＋ 電流の湧き出し ＝ 0

となっている.

3 次元の電流密度と電荷密度について，電荷保存則は

$$\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV$$

であった（スライド９）.

この式をつぎのように変形する：

１．右辺の時間による微分が 1 変数の微分となっている理由は，座標についての定積分により ρ の変数のうち x,y,z が消えて t だけが残ったから.

２．時間による微分は，体積積分をする前に行ってもよいが，そのときは積分記号内の偏微分となる：

$$\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$$

３．左辺に発散定理を用いて，面積分を体積積分に変える：

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{j}\,dV=-\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV \rightarrow \quad \iiint_V \left\{\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial \rho}{\partial t}\right\}dV=0$$

４．体積 V は自由に選べるから，被積分関数が各点について 0 となる必要がある：

電荷保存則： $$\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

13　電流密度と電荷密度の関係

電流は電荷の流れだから，電流密度と電荷密度の流れになる．

この対応を，荷電粒子をモデルにして考察しよう．

荷電粒子は，ほんとうは，乱雑な熱運動が加わるが，それを無視して平均の速度だけに注目する．
１．どの荷電粒子も，同じ向きに同じ速さvで運動する．
２．荷電粒子の数密度（単位体積当たり何個）は，どこでも一定の値nとする．
３．荷電粒子１個の電荷をqとする：　電荷密度は $\rho = qn$

図の円筒の軸方向に電流が流れる．A 点を通過する電流を求める．
１．速度（したがって）電流と直交し，A を含む断面S
２．A の左側の体積 $S \times vdt$ の内部の粒子が dt 内に A を通過する．
３．dt 内に A を通過する電荷：　$dQ = \rho\, S\, v\, dt$
４．　〃　電流：　$I = \frac{dQ}{dt} = \rho v S$
５．　〃　電流密度：　$j = \frac{I}{S} = \rho v$