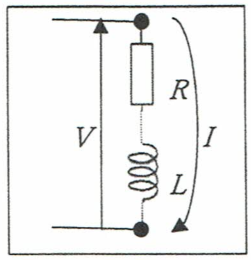
【電磁場と電磁波（周波数応答）　中間試験】

図のように抵抗Ｒとコイル L を直列接続したシステムに交流電流



$$I(t) = I_0\cos(\omega t) = \mathrm{Re}[\tilde{I}_0 e^{i\omega t}]$$

が流れるとき，その両端の電圧が

$$V(t) = V_0\cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}[\tilde{V}_0 e^{i\omega t}]$$

となるという．

抵抗の両端の電圧と流れる電流の関係は$V_R(t) = R\ \ I(t)$であり，コイルの両端の電圧と流れる電流の関係は$V_L(t) = L\frac{dI}{dt}$である．

1．$V(t) = V_R(t) + V_L(t)$と$I(t)$の関係を表す微分方程式を書け．

$$V(t) = RI(t) + L\frac{dI}{dt}$$

2．問１の解答の微分方程式により表される系（入力は電流，出力は電圧）が，線形かつ時不変であることを示せ．

線形性：$V_1(t) = RI_1(t) + L\frac{dI_1}{dt}, V_2(t) = RI_2(t) + L\frac{dI_2}{dt}$の両辺にそれぞれ実数$a_1$と$a_2$を掛けて辺々を加えると

$$a_1V_1 + a_2V_2 = RI_1(t) + RI_2(t) + L\frac{dI_1}{dt} + L\frac{dI_2}{dt} = R(a_1I_1 + a_2I_2) + L\frac{d}{dt}(a_1I_1 + a_2I_2)$$

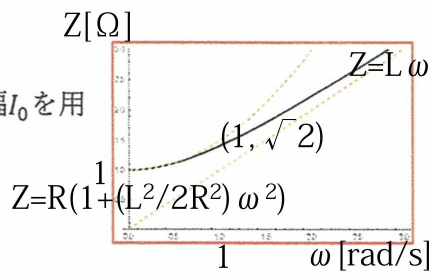
時不変性：$t = t' + \tau$とすると，$\frac{dI(t')}{dt} = \frac{dI(t')}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{dI(t')}{dt'}$より，$V(t') = RI(t') + L\frac{dI(t')}{dt'}$

3．問１の微分方程式が定める電流と電圧の関係を，複素電流振幅と複素電圧振幅の関係（$\tilde{V}_0 = \tilde{Z}(\omega)\tilde{I}_0$）として書いたときの複素インピーダンス$\tilde{Z}(\omega)$を求めよ．

$$\tilde{V}_0 = R\tilde{I}_0 + Li\omega\tilde{I}_0 = (R + i\omega L)\tilde{I}_0 \quad\rightarrow\quad \tilde{Z}(\omega) = R + i\omega L$$

4．複素インピーダンスの大きさ$Z(\omega) = |\tilde{Z}(\omega)|$を R と L を用いて表せ．また$R = 1\Omega$, $L = 1\mathrm{H}$のとき$Z(\omega)$の変化を示すグラフを描け．

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \omega^2L^2}$$



5．電圧$V(t)$の振幅V_0と位相角θ（のタンジェント）をRとLおよび電流の振幅I_0を用いて表せ．

$$V_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2L^2}\times I_0, \qquad \tan\theta = \omega\frac{L}{R}$$

6．電流波形が単一の振動数のサイン波ではなく，$I(t) = I_1\cos(\omega t) + I_2\cos(2\omega t)$であるとき$V(t)$はどのような波形になるか，$I_k$と$\tilde{Z}(k\omega)$, $k = 1,2$を用いて示せ．また，この解答では系のどのような性質を用いたかを記せ．

$$V(t) = V_1\cos(\omega t + \theta_1) + V_2\cos(2\omega t + \theta_2)$$

$$V_k = |\tilde{Z}(k\omega)|I_k, \qquad \tan\theta_k = \mathrm{Arg}[\tilde{Z}(k\omega)]$$

系の線形性を用いた．

7．電流波形が$I(t) = I_0\cos(\omega t + \alpha)$のとき，電圧波形はどのようになるか，$V_0\cos(\omega t + \theta)$と$\alpha$を用いて表せ．また，この解答では系のどのような性質を用いたかを記せ．

$$I(t) = I_0\cos(\omega t + \alpha) = I_0\cos(\omega(t + t_0)), \qquad \alpha = \omega t_0$$

$$V(t) = V_0\cos(\omega(t + t_0) + \theta) = V_0\cos(\omega t + \theta + \alpha)$$

系の時不変性を用いた．