[電磁場と電磁波（周波数応答），中間試験]

入力波形$f(t)$と出力波形$g(t)$が次の微分方程式

$$g(t)=a\frac{d^2f}{dt^2}+b\frac{df}{dt}+cf(t) \qquad \cdots \quad [1]$$

という関係で結ばれるシステムがある．以下の問に答えよ．

1．このシステムが線形であることを確認せよ．

[解] 入力波形が$f_j(t)$のときの出力波形が$g_j(t)$とする$(j=1,2)$．確認すべきことは，「A_jを任意の実数として，入力が$A_1f_1(t)+A_2f_2(t)$のとき出力が$A_1g_1(t)+A_2g_2(t)$となること」である．

実際，微分演算子の線形性を用いると

$$\begin{aligned}
&a\frac{d^2}{dt^2}\big(A_1f_1(t)+A_2f_2(t)\big)+b\frac{d}{dt}\big(A_1f_1(t)+A_2f_2(t)\big)+c\big(A_1f_1(t)+A_2f_2(t)\big)\\
&\qquad = A_1\cdot a\frac{d^2f_1}{dt^2}+A_2\cdot a\frac{d^2f_2}{dt^2}+A_1\cdot b\frac{df_1}{dt}+A_2\cdot b\frac{df_2}{dt}+A_1\cdot cf_1(t)+A_2\cdot cf_2(t)\\
&\qquad =\left(A_1\cdot a\frac{d^2f_1}{dt^2}+A_1\cdot b\frac{df_1}{dt}+A_1\cdot cf_1(t)\right)\\
&\qquad +\left(A_2\cdot a\frac{d^2f_2}{dt^2}+A_2\cdot b\frac{df_2}{dt}+A_2\cdot cf_2(t)\right)=A_1g_1(t)+A_2g_2(t)
\end{aligned}$$

となり題意が確認された．

2．このシステムが時不変であることを確認せよ．

[解] 入力波形が$f(t)$のときの出力波形が$g(t)$とすると，確認すべきことは「任意のτについて，入力波形が$f(t+\tau)$のときの出力波形が$g(t+\tau)$となる」ことである．

実際，$t'\equiv t+\tau$とすると，$\frac{dt'}{dt}=1$だから，合成関数の微分法により

$$\frac{df(t')}{dt}=\frac{df(t')}{dt'}\frac{dt'}{dt}=\frac{df(t')}{dt'}, \qquad \frac{d^2f(t')}{dt^2}=\frac{d}{dt}\frac{df(t')}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{df(t')}{dt'}=\frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\frac{df(t')}{dt'}=\frac{d^2f(t')}{dt'^2}$$

したがって

$$a\frac{d^2f(t')}{dt^2}+b\frac{df(t')}{dt}+cf(t')= \ a\frac{d^2f(t')}{dt'^2}+b\frac{df(t')}{dt'}+cf(t')=g(t')$$

となり題意が確認された.

3. $f(t)=A_0\cos\omega t$のとき$g(t)=B_c\cos\omega t+B_s\sin\omega t$として，$B_c$と$B_s$を入力波形の値$A_0,a,b,c,\omega$で表せ．また，$g(t)=B_0\cos(\omega t+\theta)$と表すとき，$B_0$と$\theta$を B_cとB_sにより表せ.

[解]

$$
\begin{aligned}
g(t)&=a\frac{d^2}{dt^2}(A_0\cos\omega t)+b\frac{d}{dt}(A_0\cos\omega t)+c(A_0\cos\omega t)\\
&=-a\omega^2A_0\cos\omega t-b\omega A_0\sin\omega t+cA_0\cos\omega t\\
&=-A_0\{(a\omega^2-c)\cos\omega t+(b\omega)\sin\omega t\}
\end{aligned}
$$

これより

$$B_{\mathrm{c}}=-A_0(a\omega^2-c),\qquad B_s=-A_0b\omega$$

つぎに

$$g(t)=B_0\cos(\omega t+\theta)=B_0\cos\theta\cos\omega t-B_0\sin\theta\sin\omega t\ =B_c\cos\omega t+B_s\sin\omega t$$

より

$$B_c=B_0\cos\theta,B_s=-B_0\sin\theta\quad\rightarrow\quad B_0=\sqrt{B_c^2+B_s^2},\qquad\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{B_s}{B_c}$$

4. $f(t)=\mathrm{Re}[\tilde f(t)]$, $g(t)=\mathrm{Re}[\tilde g(t)]$ ただし $\tilde f(t)=\tilde A_0e^{i\omega t},\tilde A_0=A_0$ および $\tilde g(t)=\tilde B_0e^{i\omega t},\tilde B_0=B_0e^{i\theta}$ とする．システムの応答を表す微分方程式[1]を「複素振幅の間の関係式，$\tilde B_0=\tilde Z(\omega)\tilde A_0$」として表したとき，$\tilde Z(\omega)$の式を求めよ.

[解] 式[1]を$\mathrm{Re}[\tilde f(t)]$と$\mathrm{Re}[\tilde g(t)]$により書き直すと

$$\mathrm{Re}[\tilde g(t)]=a\frac{d^2\mathrm{Re}[\tilde f(t)]}{dt^2}+b\frac{d\mathrm{Re}[\tilde f(t)]}{dt}+c\mathrm{Re}[\tilde f(t)]$$

実数部を求める演算 Re の線形性から

$$\mathrm{Re}[\tilde g(t)]=\mathrm{Re}\left[a\frac{d^2\tilde f(t)}{dt^2}+b\frac{d\tilde f(t)}{dt}+c\tilde f(t)\right]\rightarrow\ \tilde g(t)=\ a\frac{d^2\tilde f(t)}{dt^2}+b\frac{d\tilde f(t)}{dt}+c\tilde f(t)$$

つぎに

$$\frac{d\tilde f(t)}{dt}=i\omega\tilde A_0e^{i\omega t},\qquad\frac{d^2\tilde f(t)}{dt^2}=-\omega^2\tilde A_0e^{i\omega t}$$

これより

$$\widetilde{B}_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 a \widetilde{A}_0 e^{i\omega t} + i\omega b \widetilde{A}_0 e^{i\omega t} + c \widetilde{A}_0 e^{i\omega t}$$

$$\widetilde{B}_0 = (c - \omega^2 a + i\omega b)\widetilde{A}_0 \quad \rightarrow \quad \widetilde{Z}(\omega) = (c - \omega^2 a) + i\omega b$$